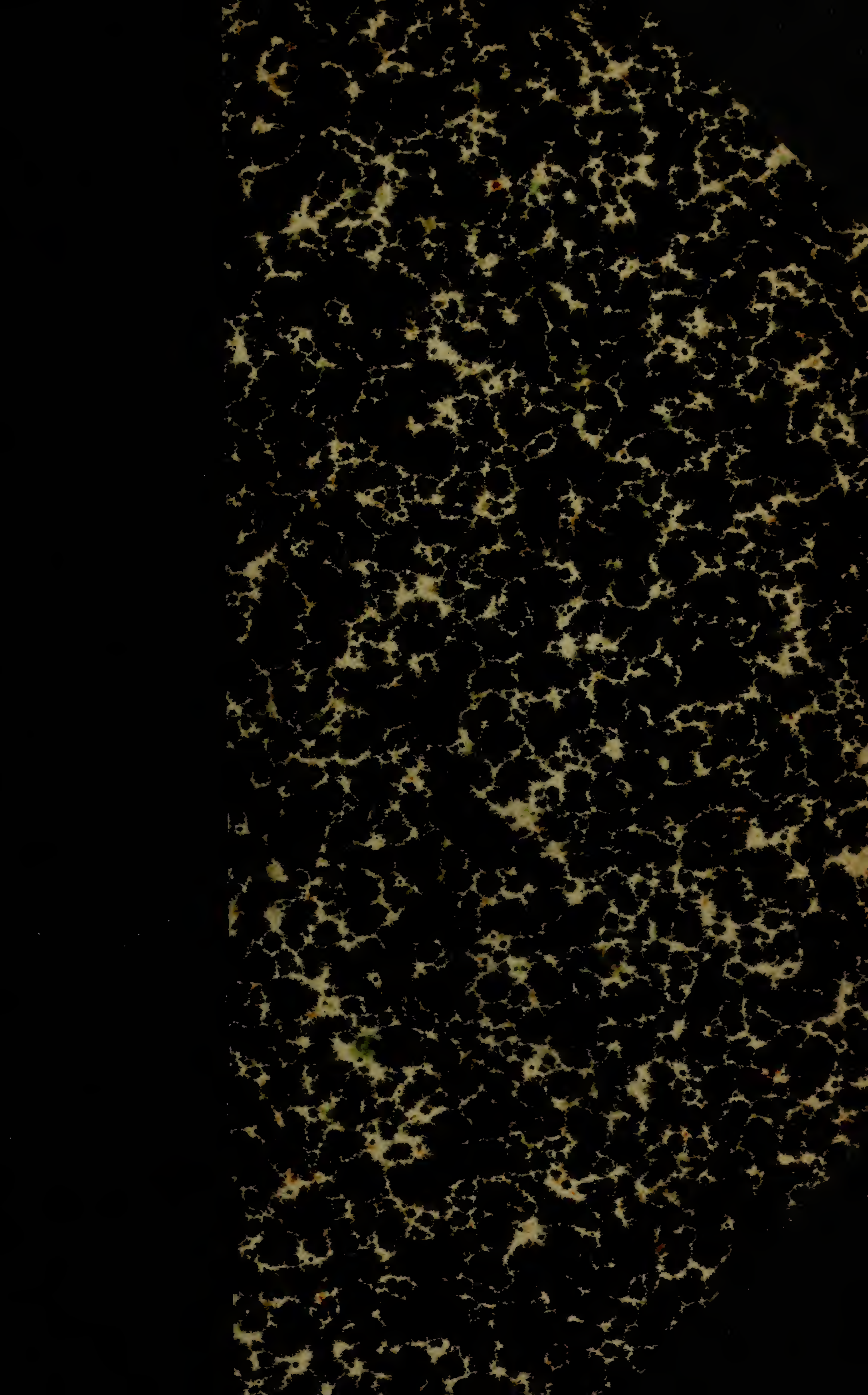
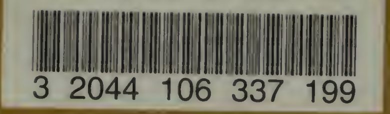




Per Neth
A-4

HARVARD UNIVERSITY
ARNOLD ARBORETUM
PRESENTED BY CHARLES SPRAGUE SARGENT
1892

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISES DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLOBORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot** et **C. K. Hoffmann.**

TOME XVII.

HAARLEM,
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1882.

ARNOLD ARBORETUM

TABLE DES MATIÈRES.

PROGRAMME

DE LA

Société Hollandaise des Sciences à Harlem,

POUR L'ANNÉE 1866.

La Société Hollandaise des Sciences a tenu, le 19 Mai 1866, sa cent-quatorzième séance annuelle.

La séance fut ouverte par le Directeur-Président, M. L. J. Quarles van Ufford, qui rappela les pertes éprouvées par la Société depuis la dernière assemblée générale, et rendit hommage aux mérites des défunts: M. F. A. baron van Hall, directeur de la Société, M.M. H. J. Halbertsma et R. Lobatto, membres regnicoles et J. G. Forchhammer, de Copenhague, membre étranger. Le président donna ensuite connaissance de la nomination de M.M. J. A. Willink Wz., H. Hoeufft van Velzen et A. van Stralen, aux fonctions de Directeurs de la Société.

Le Secrétaire fit connaître que, depuis la dernière séance générale, les parties suivantes des publications de la Société avaient paru:

1°. Mémoires, Tome XXII, 2e partie: J. Beissel, *Ueber die Bryozoen der Aachner Kreidebildung.*

2°. Mémoires, Tome XXIII, W. Sartorius von Waltershausen, *Untersuchungen über die Klimate der Gegenwart und der Vorwelt, mit besonderer Berücksichtigung der Gletscher-Erscheinungen in der Diluvialzeit.*

3°. *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles,* Tome I, 1e et 2e livraisons.

Le Secrétaire communiqua ensuite:

1°. Que Mr. le Prof. T. Zaaijer de Leijden, avait offert à la Société, pour être publié par ses soins, un mémoire écrit en allemand: *Untersuchungen über die Form des Beckens Javanischer Frauen*, et que les Directeurs avaient décidé, sur l'avis de juges compétents, d'accueillir ce mémoire dans les publications de la Société.

2°. Qu'il avait été envoyé un mémoire allemand en réponse à la question III, page 3, du Programme de 1865:

> La Société demande une myologie comparée des membres antérieurs des reptiles et des oiseaux, mise en rapport avec la dénomination des muscles correspondants ou homologues chez les mammiféres et surtout chez l'homme.

A l'unanimité des voix, il a été décidé par la Société d'accorder à l'auteur de ce mémoire la médaille en or et, en outre, la prime de 150 florins; à condition qu'il ajouterait à son travail les figures reconnues nécessaires par les juges du concours, et que la bibliographie de la matière serait traitée d'une manière plus complète.

L'ouverture du billet a fait connaître que l'auteur du mémoire était M. Nicolas Rüdinger, Dr., adjoint royal et prosecteur à l'Institut anatomique de Munich.

3°. Que la Société avait reçu deux mémoires, tous deux en allemand, en réponse à la question VIII, page 4, du Programme de 1865:

> L'origine de plusieurs roches nous est encore inconnue; la Société désire qu'au moins une roche, au choix de l'auteur, soit examinée en vue de décider si elle a été déposée d'une dissolution dans l'eau ou bien formée par la solidification d'une masse fondue par la chaleur.

La Société a décerné, à l'unanimité des voix, la médaille d'or à chacun de ces deux mémoires, dont l'ouverture des billets a fait connaître les auteurs: M.M. Louis Dressel S. J. de Maria-Laach en Prussse, et Ernest Weiss, Dr. en Sc., Professeur à l'école royale des mines de Sarbruggen.

On a nommé membre de la Société Mr. W. Koster, membre

de l'Académie royale des Sciences, professeur à la faculté de médecine d'Utrecht.

Ont été nommés membres de la Commission de rédaction des Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, MM. C. A. J. A. Oudemans et W. Koster, membres de la Société.

La Société a mis, cette année, au concours les questions suivantes, auxquelles elle demande qu'on réponde

avant le 1er Janvier 1868.

I. La Société demande une description, accompagnée de figures exactes, des appendices coecaux du pylore chez les poissons; elle désire en même temps des recherches nouvelles sur la petite glande que Stannius et Brockmann ont fait connaître comme pancréas chez certains poissons osseux.

II. La Société demande la détermination exacte des forces électro-motrices pour au moins six éléments galvaniques; il faudra tenir compte du degré de concentratiou des liquides employés, ainsi que de la température.

III. Malgré les recherches qui ont été publiées, tout récemment encore par A. Paalzow (Pogg. Ann. CXXVII, page 126), sur la chaleur de l'étincelle électrique, il reste encore beaucoup d'incertitude relativement à la connexion qui existe entre cette chaleur et la résistance. La Société demande qu'on étudie cette connexion.

IV. La Société demande des recherches sur la transformation des corpuscules blancs du sang en corpuscules rouges. Comment se fait cette transformation, et à quelles causes doit-on l'attribuer?

V. On demande une description anatomique de *Chionis alba* Forster, accompagnée des figures nécessaires, et qui permette de fixer, par comparaison, la place que ce genre doit occuper dans la classification naturelle des oiseaux.

VI. La chaleur obscure peut amener les corps à l'état d'incandescence. La Société désire que ce fait soit étudié de nouveau et exactement apprécié.

VII. Nous ne possédons pas encore une connaissance exacte des roches volcaniques de Java, surtout des roches les plus anciennes, qui forment l'assise fondamentale des volcans, et qu'on a regardées quelquefois comme des basaltes, des porphyres, des diorites, ou même comme des syénites. La Société demande une détermination et une description minéralogiques d'au moins une trentaine de ces roches.

Les échantillons devront être choisis de manière à caractériser les différentes phases de l'histoire des volcans; il sera donc nécessaire d'indiquer, avec précision, la position géologique de chacun de ces échantillons.

L'auteur du mémoire couronné sera tenu de remettre à la Société des exemplaires des roches décrites.

VIII. Les figures, dites de Widmanstädt, que la corrosion par l'acide nitrique produit à la surface du fer météorique, paraissent indiquer la présence, dans les différentes masses de fer météorique, d'alliages définis du fer, principalement avec le nickel et le cobalt. La Société désire qu'on entreprenne de déterminer la composition de quelques-uns de ces alliages définis, et, en même temps, qu'on essaie de faire apparaître les mêmes figures sur des mélanges artificiels de fer, de nickel et de cobalt.

IX. La Société demande une description géologique de Sumatra.

X. La Société demande une description géologique des alluvions fluviatiles de Surinam, aussi bien des plus récentes, qui continuent à se déposer de nos jours, que des alluvions anciennes qui forment les bords des rivières en dessus des points où la marée cesse de se faire sentir.

XI. La Société demande des recherches expérimentales sur le rapport qui existe entre le degré de trempe du verre et son pouvoir dispersif.

XII. Les expériences de Fizeau (*Cosmos*, 5 Juillet 1865) sur la propagation de la lumière à travers les corps, à différentes températures, semblent indiquer que l'eau n'est pas la seule substance qui présente un maximum de densité à une température déterminée. La Société désire qu'on examine un certain nombre de corps à ce point de vue.

XIII. Il résulte des recherches de Melsens (*Cosmos*, 2 août 1865) qu'en présence de plusieurs métaux différents, l'électricité de tension ne cherche pas toujours sa voie à travers ceux qui passent généralement pour les meilleurs conducteurs. La Société demande qu'on soumette ce fait remarquable à un nouvel examen.

La Société rappelle qu'elle a proposé les années dernières les questions suivantes pour qu'il y soit répondu

avant le premier Janvier 1867.

I. Les poissons de l'archipel Indien ont été l'objet des recherches d'un savant hollandais. La Société désire que les autres vertébrés de ces îles, surtont ceux de Borneo, de Celèbes et des Moluques, et avant tout ceux de la Nouvelle Guinée soient soumis à un pareil examen. Elle décernera sa médaille d'or au naturaliste qui lui enverra, soit la description de quelques espèces nouvelles de mammifères, d'oiseaux ou de reptiles de ces îles, soit un mémoire contenant des faits nouveaux et remarquables sur la structure et la manière de vivre de quelques-uns de ces animaux.

II. La Société demande une détermination aussi exacte que possible des erreurs des tables de la lune, qu'on doit à M Hansen, par les occultations des Pleïades, observées pendant la dernière révolution du noeud de l'orbite lunaire.

III. Le célèbre mécanicien Ruhmkorff a obtenu des étincelles d'une longueur extraordinaire par les machines d'induction qui portent son nom. La Société désire voir déterminer par des recherches théoriques et expérimentales les lois qui régissent la longueur et l'intensité de ces étincelles dans des machines de grandeur et de construction différentes.

IV. Quelle différence y a-t-il entre la perception des sons avec une seule et avec deux oreilles? La Société demande des recherches précises sur cette différence et en général sur l'influence de l'audition biauriculaire.

V. D'après les recherches de M. Pasteur et d'autres savants la fermentation est due au développement de cryptogames et d'infusoires. La Société demande à ce sujet des recherches nouvelles et positives, et, dans le cas où les résultats de M. Pasteur se trouveraient confirmés, une description exacte de ces plantes et de ces animaux et de leur mode d'action.

VI. Quelle est la meilleure construction de bateaux à vapeur, destinés à débarrasser les rivières des amas de glaçons qui obstruent leur cours? La Société désire qu'en répondant à cette question on tienne bien compte de tout ce que la pratique a déjà décidé sur ce sujet, tant dans notre pays qu'ailleurs.

VII. A l'exception de quelques terrains sur la frontière orientale du Royaume des Pays-Bas, les formations géologiques de ce pays recouvertes de terrains d'alluvium et de diluvium ne sont encore que fort peu connues. La Société désire recevoir un exposé de tout ce que les forages exécutés en divers lieux et d'autres

observations pourraient faire connaître avec certitude sur la nature de ces terrains.

VIII. On sait, surtout par le travail de M. Roemer à Breslau, que plusieurs des fossiles que l'on trouve près de Groningue appartiennent aux mêmes espèces que ceux que l'on trouve dans les terrains siluriens de l'île de Gothland. Ce fait a conduit M. Roemer à la conclusion que le diluvium de Groningue a été transporté de cette île de Gothland; mais cette origine paraît peu conciliable avec la direction dans laquelle ce diluvium est déposé, direction qui indiquerait plutôt un transport de la partie méridionale de la Norvège. La Société désire voir décider cette question par une comparaison exacte des fossiles de Groningue avec les minéraux et les fossiles des terrains siluriens et autres de cette partie de la Norvège, en ayant égard aussi aux modifications que le transport d'un pays éloigné et ses suites ont fait subir à ces minéraux et à ces fossiles.

IX. La combustion de l'acier, du fer et d'autres métaux dans l'oxygène est accompagnée de l'apparition d'une multitude de particules incandescentes, qui jaillissent de la surface du corps en combustion et que l'on retrouve après l'expérience au fond du vase dans lequel la combustion s'est opérée. Le même fait s'observe dans l'arc lumineux électrique d'une forte pile entre deux rhéophores métalliques, dont un du moins est en fer ou en acier.

La Société demande une explication, fondée sur des recherches nouvelles et décisives, de la cause de ce phénomène.

X. On demande une continuation des recherches remarquables de M. Brewster sur les liquides et les gaz qui remplissent les petites cavités que l'on trouve parfois dans les minéraux cristallisés.

XI. La Société demande une comparaison anatomique exacte entre le squelette du *Cryptobranchus Japonicus* et celui des sala-

mandres fossiles d'Oeningen, ainsi que celui de la salamandre de Roth.

XII. La Société demande une description exacte, avec des figures, du squelette et des muscles de *Sciurus vulgaris*, comparés à ce que l'on sait, sur ce sujet, des *Lemurides* et des *Chiromys*, pour que la place à assigner à ce dernier genre dans la classification naturelle puisse être déterminée avec plus de sûreté qu'il n'a été possible jusqu'ici.

XIII. La Société demande une description anatomique, avec des figures, du Potto américain (*Cercoleptes* Illiger, *Vivera caudivolvula* Pallas), comparée à la structure d'autres mammifères, comme *Nasua* et *Procyon* et à celle des quadrumanes.

Elle recommande principalement à l'attention de l'auteur la communication de M. Owen (*Proceedings of the Zoologic. Society* 1835, p. 119—124).

XIV. La Société désire que l'action physiologique de l'acide carbonique sur l'organisme animal, surtout sur celui de l'homme, soit l'objet d'expériences nouvelles et décisives.

XV. On demande des recherches exactes sur la répartition des plantes et des animaux dans les couches de houille de quelques pays différents.

XVI. Un mémoire de Savart, communiqué par extrait dans le journal l'Institut N°. 313 en 314, par M. Masson, contient l'exposé d'expériences sur le mouvement simultané de deux pendules. La Société désire que ces expériences soient répétées et expliquées, si leur résultat se confirme.

XVII. Les dernières recherches sur les battements et les sons résultants ne conduisent pas nécessairement à abandonner le principe de Daniel Bernouilli de la coëxistence des petites oscil-

lations pour les vibrations qui se propagent dans un milieu indéfini. Le cas est tout autre s'il s'agit de vibrations à noeuds et à ventres fixes dans un milieu circonscrit.

La Société demande des recherches nouvelles, tant expérimentales que théoriques, sur les sons résultants et les vibrations des cordes tendues et des membranes qui les produisent par leur combinaison et leur interférence.

XVIII. Il parait que le phénomène, dit de Porret, du transport électrique de la matière à travers un diaphragme poreux n'est pas un fait isolé, mais qu'en le considérant dans ses rapports avec d'autres phénomènes on trouvera qu'il n'est qu'un cas particulier d'une action générale. La Société demande donc des recherches nouvelles sur ce phénomène, en rapport surtout avec celles de M. Hittorff sur le transport des éléments dans l'électrolyse.

XIX. Des recherches récentes ont montré une analogie importante entre le pouvoir conducteur des corps pour la chaleur et pour le courant électrique. Les substances comparées à cet égard étaient toutes de bons conducteurs de l'électricité.

La Société demande des recherches sur le pouvoir conducteur pour la chaleur de quelques substances isolantes ou peu conductrices, comme le verre, le marbre etc., et une discussion des résultats obtenus, en rapport avec ce que les recherches remarquables de M. Gaugain ont appris sur le pouvoir conducteur et la capacité inductive de pareilles substances pour l'électricité.

XX. La Société demande des recherches expérimentales nouvelles sur le frottement intérieur ou viscosité des liquides en mouvement et sur leur frottement contre les parois du canal ou du tube dans lequel ils se meuvent. Elle désire surtout qu'un liquide visqueux, par exemple une huile grasse, soit étudié expérimentalement sous ce point de vue.

XXI. La Société demande des recherches ultérieures exactes

sur les phénomènes remarquables de dissociation découverts par M. Sainte-Claire-Deville.

XXII. On demande la détermination exacte de la chaleur produite par la combustion des glycerides.

XXIII. La distillation fractionnée et la précipitation fractionnée, préconisées comme moyens pour séparer l'un de l'autre les corps homologues dans leurs mélanges, sont comme tels très insuffisants. La Société demande la recherche de meilleurs moyens pour obtenir ce résultat.

XXIV. Il parait que la diminution de température dans les couches successives de l'air atmosphérique n'est pas égale sous les différentes latitudes; la Société voudrait voir éclaircir ce point si intéressant pour la météorologie par de nouvelles recherches.

XXV. La Société demande un mémoire illustré contenant des recherches microscopiques très exactes sur la formation et le développement de l'oeuf dans l'ovaire des poissons et des oiseaux.

XXVI. La Société demande une monographie aussi complète que possible des lichens des Pays-Bas.

XXVII. Nous possédons des déterminations très exactes de la densité et de la dilatation des mélanges d'alcool éthylique et d'eau par Gilpin, Gay Lussac et M. von Baumhauer. La Société demande des déterminations non moins exactes pour les mélanges d'eau et d'alcool méthylique.

XXVIII. Nous ne connaissons que dans un petit nombre de cas, avec assez d'exactitude, la densité des corps solubles dans l'eau, qui ne saurait être trouvée par la pesée hydraulique ordinaire. Vu que la densité est un des caractères les plus distinctifs des corps, la Société demande la détermination exacte et à diverses

températures d'au moins cinquante corps solubles dans l'eau.

XXIX. De plusieurs plantes, p. e. Aesculus Hippocastanum, Amygdalus communis, Quercus pedunculata, Tilia parvifolia et grandifolia, Geranium etc., une certaine quantité d'ovules ne se développent pas. La Société désire voir expliquer la cause de cette anomalie constante par des recherches microscopiques, illustrées par des figures. Ces recherches doivent comprendre au moins dix espèces de plantes.

XXX. Dans les recherches volumétriques la condensation des gaz sur les surfaces exerce une influence fâcheuse, vu que le manque de données précises sur cette condensation à diverses températures et à diverses pressions ne nous permet pas d'appliquer au volume les corrections nécessaires. La Société demande de nouvelles recherches sur cette question importante.

XXXI. La Société demande des déterminations de la température d'eaux profondes stagnantes (lacs) à diverses profondeurs.

XXXII. La Société demande une description minutieuse, basée sur des expériences nouvelles, de la fécondation dans la famille des Graminées: elle désire une réponse exacte aux questions suivantes:

1°. Les anthères s'ouvrent-elles avant, après ou bien au moment de la séparation des glumelles (paleae)?

2°. Le pollen se repand-il sur les stigmates avant, après ou bien au moment de la séparation des glumelles?

3°. Cette séparation des glumelles influe-t-elle sur la descente du pollen sur les stigmates?

4°. Quelles causes extérieures peuvent faciliter ou empêcher cette descente du pollen sur les stigmates?

5°. Les stigmates sécrètent-ils une matière apte à retenir les grains de pollen?

6°. Par quelle voie les tubes pollinaires descendent-ils vers le sac embryonnaire?

Ces recherches doivent comprendre en premier lieu le froment, l'orge, le seigle et l'avoine, et ensuite une quantité aussi grande que possible d'autres plantes appartenant à diverses subdivisions de la famille des Graminées.

Le prix ordinaire d'une réponse satisfaisante à chacune de ces questions est une médaille d'or de la valeur de 150 florins, et de plus une gratification de 150 florins, si la réponse en est jugée digne. Il faut adresser les réponses, bien lisiblement écrites en hollandais, français, anglais, italien, latin, ou allemand (en lettres italiques) affranchies, et accompagnées de billets conformes à ceux généralement adoptés dans les concours, à M. le Professeur E. H. von Baumhauer, *Secrétaire Perpétuel de la Société Hollandaise des Sciences* à Harlem.

TOME XVII. 1me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES
EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.**

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1882.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR LES

MOUVEMENTS DES FLUIDES SOUS L'INFLUENCE DU FROTTEMENT,

PAR

G. J. MICHAËLIS.

Lorsqu'un fluide n'est soumis qu'à l'action de forces pouvant être représentées comme les coefficients différentiels d'une fonction potentielle, et que les composantes u, v et w de la vitesse d'une molécule, suivant trois axes, satisfont à un certain moment aux conditions

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

elles continueront indéfiniment à satisfaire à ces conditions.

Cette propriété a été trouvée par Lagrange. La fonction φ est appelée *potentiel de la vitesse*. M. Helmholtz [1]) a le premier étudié dans les fluides des mouvements dus à des forces qui ne

[1]) *Journal von Crelle*, t. LV, 1858.

peuvent pas être dérivées d'une fonction potentielle. Il nous a fait connaître les formes de mouvement qui sont produites par de pareilles forces, auxquelles appartient, entre autres, le frottement. Dans la supposition qu'un fluide, où ces *mouvements* dits *gyratoires* ont une fois pris naissance, reste ultérieurement sous la seule influence de forces ayant un potentiel, il a démontré les lois suivantes: 1°. Les molécules qui à un certain moment donné ne tournent pas autour d'un axe n'acquièrent jamais une vitesse angulaire, propriété qui exprime la même chose que le théorème de Lagrange; 2°. la ligne qui à un instant donné coïncide avec l'axe de rotation des molécules qu'elle coupe (*ligne gyratoire*) coïncide indéfiniment avec ce même axe. Si l'on imagine que de semblables lignes gyratoires soient tracées par tous les points du contour d'un élément de surface, il en résulte un *filet gyratoire.* 3°. Le produit de la vitesse angulaire et de la section (*intensité*) d'un filet gyratoire est constant sur toute la longueur du filet et conserve toujours la même valeur. Un filet gyratoire, dans une masse fluide illimitée, ne peut donc pas avoir de fin.

M. W. Thomson [1]) a notablement étendu ces lois et montré, par exemple, qu'elles s'appliquent aussi aux fluides compressibles, si l'on y regarde la pression comme une fonction arbitraire de la densité.

M. Bobylew [2]) a examiné quelle modification les susdites lois éprouvent lorsque le fluide reste soumis à l'action des forces qui donnent naissance aux mouvements gyratoires; il a recherché en particulier l'influence du frottement interne, et a trouvé que la loi, suivant laquelle l'intensité est à chaque instant constante sur toute la longueur d'un filet gyratoire, persiste même en pareil cas. Les autres lois perdraient leur validité dans cette hypothèse.

M. Bresse [3]), au contraire, a exprimé l'opinion que le théo-

---

[1]) *Edinburg Transactions*, Vol. 25. 1869.

[2]) *Mathematische Annalen*, Band VI.

[3]) *Comptes rendus*, 1880, p. 501.

rème de Lagrange, soit la première loi de Helmholtz, reste vrai même quand on tient compte du frottement interne. Plus tard, il a ajouté que M. Saint Venant était déjà arrivé à ce résultat en 1869.

M. Boussinesq [1]) a objecté que l'action retardatrice du frottement contre les parois qui limitent le fluide se propage à travers la masse entière; que par conséquent les molécules, qui à un certain moment n'ont aucune vitesse angulaire, peuvent, à un autre moment, prendre un mouvement de rotation.

Dans les pages suivantes je traiterai spécialement de l'influence du frottement. Les autres forces qui agissent sur le fluide seront supposées avoir un potentiel.

Si le fluide est homogène, incompressible et indéfini, et qu'à un moment donné il y ait absence complète de mouvements de rotation, ceux-ci ne pourront jamais prendre naissance. S'il existe des filets gyratoires, ils ne peuvent se terminer au sein du fluide; toutefois, ils ne coïncident pas toujours avec les mêmes molécules, mais se propagent, très lentement il est vrai; en même temps, la force vive de leur mouvement diminue, suivant une formule qui sera déduite au § 1. Les filets rectilignes, ainsi que les filets circulaires, conservent leur forme, mais se meuvent tout autrement que cela n'est le cas dans l'hypothèse de Helmholtz.

Lorsque le fluide est limité, des mouvements gyratoires peuvent prendre naissance à la surface, par exemple si le fluide y est en contact avec un autre, et que les vitesses normales se détruisent, tandis que les vitesses tangentielles diffèrent. Supposons, pour prendre un exemple simple, que le fluide s'étende d'un côté d'un plan jusqu'à l'infini, et que la surface consiste en filets gyratoires rectilignes, qui soient parallèles, aient des intensités égales et remplissent uniformément la surface. Le mouvement se propagera, au sein du fluide, de molécule en molécule; la vitesse angulaire en un point déterminé dépendra

[1]) *Comptes rendus*, 1880, p. 736.

uniquement du temps et de la distance du point à la surface, si à l'origine il n'existait pas de mouvements de rotation à l'intérieur de la masse fluide. On peut démontrer que les temps, nécessaires pour que des points différents acquièrent la même vitesse angulaire, sont entre eux comme les carrés des distances de ces points à la surface limite.

Pour des surfaces où le fluide est en contact avec des corps solides, différentes conditions peuvent exister.

Souvent il est permis d'admettre que, dans la surface de contact, les molécules ne se meuvent pas l'une par rapport à l'autre. M. Helmholtz et M. Piotrowski [1]) ont établi expérimentalement que ce phénomène se présente pour les surfaces métalliques lisses, dans l'alcool et l'éther. Dans l'eau et beaucoup d'autres liquides, toutefois, ils ont trouvé un mouvement relatif par rapport au corps solide. On peut alors admettre que la composante de la pression dans la direction du plan de contact est partout proportionnelle et de direction opposée à la vitesse de ce mouvement relatif. La quantité constante qui s'introduit alors comme facteur est appelée coefficient de glissement. [2]) Elle a été déterminée pour quelques substances.

Pour le cas d'une des conditions limites qui viennent d'être indiquées, on peut déterminer le mouvement d'un liquide compris entre deux plans, qui sont l'un et l'autre fixes, ou dont l'un possède à chaque instant un mouvement partout égal et parallèle.

Dans le mémoire que nous avons cité en premier lieu, M. Helmholtz a montré que si, à un moment donné, les composantes de la vitesse angulaire sont connues en chaque point d'un fluide incompressible, l'état dynamique à ce moment, produit par les mouvements gyratoires, peut être calculé. Il en est encore de même quand on tient compte du frottement, parce que le mouvement est considéré dans un seul élément de temps.

---

[1]) *Wiener Sitzungsber.*, Band 40, 1860.

[2]) Voir, sur cette théorie, Kirchhoff, *Vorles. über Math. Physik*, p. 372.

Si l'on admet en outre que le mouvement est infiniment petit, on obtient, pour déterminer la vitesse angulaire, des équations qui dans certains cas peuvent être intégrées. Et si de plus on connaît le potentiel de la vitesse, tel qu'il serait en négligeant le frottement, le mouvement du fluide est complètement déterminé dans un pareil cas.

A titre d'exemple, je traiterai, au § 3, du mouvement stationnaire d'un ellipsoïde de révolution qui se déplace dans la direction de l'axe de révolution.

§ 1.

Les équations du mouvement d'un fluide, lorsqu'il est tenu compte du frottement interne, sont

$$\left.\begin{aligned}
h\frac{du}{dt} &= h\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \tfrac{1}{3} f\frac{\partial U}{\partial x} + f\Delta u,\\
h\frac{dv}{dt} &= h\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \tfrac{1}{3} f\frac{\partial U}{\partial y} + f\Delta v,\\
h\frac{dw}{dt} &= h\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial p}{d z} + \tfrac{1}{3} f\frac{\partial U}{\partial z} + f\Delta w,\\
\frac{dh}{dt} &+ h\,U = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Le signe Δ est mis en place de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right);$$

U est la notation pour $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$,

tandis que u, v et w désignent les composantes de la vitesse, suivant trois axes fixes, au point considéré; enfin, h représente la densité, p la partie de la pression qui en chaque point est indépendante de la direction, et V la fonction potentielle des forces extérieures.

Les équations (1) s'appliquent à tous les points qui sont situés à l'intérieur du fluide; à la surface, où il est en contact avec d'autres fluides ou avec des corps solides, interviennent,

suivant les circonstances, des conditions différentes; provisoirement, nous supposons le fluide illimité dans tous les sens. Les composantes de la vitesse angulaire d'une molécule sont déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned} 2\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ 2\eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Des trois premières équations (1) on peut éliminer les fonctions V et p. A cet effet, différentions la troisième par rapport à y, la seconde par rapport à z, puis retranchons-les l'une de l'autre: on trouve.

$$2\frac{d\xi}{dt} = -2\xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\eta\frac{\partial u}{\partial y} + 2\zeta\frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial y}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial y} - \frac{1}{3}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial z} + 2\frac{f}{h}\Delta\xi + \frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial y}\Delta w - \frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial z}\Delta v \dots (3)$$

Dans un fluide homogène incompressible, h peut être regardé comme constant; dans un fluide compressible, nous supposons que la quantité p est une fonction arbitraire de la densité. Pour l'une et l'autre hypothèse, le terme $\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{h}}{\partial y}$ disparaîtra de l'équation (3). On a en outre les relations

$$\Delta u = 2\frac{\partial\eta}{\partial z} - 2\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\Delta v = 2\frac{\partial\zeta}{\partial x} - 2\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\Delta w = 2\frac{\partial\xi}{\partial y} - 2\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z};$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= -\xi\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\eta\frac{\partial u}{\partial y}+\zeta\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial z}+\\
&\quad+\frac{f}{h}\Delta\xi+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial y}-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial z}.\\
&\text{De même on trouvera}\\
\frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial v}{\partial x}-\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\zeta\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{2}{3}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial x}+\\
&\quad+\frac{f}{h}\Delta\eta+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial z}-\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial x},\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x}+\eta\frac{\partial w}{\partial y}-\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{2}{3}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial y}+\\
&\quad+\frac{f}{h}\Delta\zeta+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial x}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial y}.
\end{aligned}\right\}\cdot(4)$$

Si, à un moment donné, aucun mouvement gyratoire n'existe dans un fluide illimité, il suit de ces équations

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{2}{3}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\frac{f}{h}}{\partial z}\right),$$

et deux formules analogues pour $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ et $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$.

Comme $U=-\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}$, la formule précédente, si le coefficient de frottement est supposé constant, peut être écrite

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{2f}{3h^3}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\frac{dh}{dt}}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial\frac{dh}{dt}}{\partial y}\right).$$

On voit que, sous l'influence du frottement, des mouvements gyratoires naissent d'un changement dans la densité; toutes circonstances égales d'ailleurs, cette influence est d'autant plus grande que la densité est moindre. Si l'on néglige le frottement, une molécule, qui à un moment donné ne tourbillonne pas, ne tourbillonnera jamais, pas plus dans un gaz que dans un liquide. En tenant compte du frottement interne, il ne se produira, dans un fluide incompressible homogène, aucune vitesse angulaire, s'il n'en existe nulle part à un moment antérieur et que les limites du fluide soient supposées à une distance infinie. Mais s'il y a des filets gyratoires, on trouve dans ce cas

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{f}{h} \Delta \xi, \text{ etc.,}$$

et, comme il résulte du dernier terme, ces filets se propageront d'une molécule à l'autre. En général, toutes les propriétés du mouvement que M. Helmholtz a démontrées pour un instant unique, subsisteront aussi quand on tiendra compte du frottement. C'est ainsi que l'intensité d'un filet gyratoire sera constante sur toute sa longueur, et ce filet ne pourra donc se terminer nulle part au sein du fluide. La démonstration de cette proposition résulte de la condition

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Ensuite, lorsque le fluide est incompressible, il est satisfait à la dernière équation (1) et aux équations (2) par quatre fonctions φ, L, M et N, si l'on a

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

et que les fonctions satisfassent aux équations

$$\left.\begin{array}{l}\Delta L = -2\xi,\ \Delta M = -2\eta,\ \Delta N = -2\zeta; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} + \dfrac{\partial M}{\partial y} + \dfrac{\partial N}{\partial z} = 0;\ \Delta\varphi = 0.\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

On peut voir, à ce sujet, le mémoire déjà cité de M. Helmholtz sur les monvements gyratoires. Si donc, à un moment donné, on connaît les composantes de la vitesse angulaire et le potentiel de la vitesse tel qu'il serait en l'absence du frottement, les équations (6) détermineront l'état du mouvement à cet instant. Mais l'intensité d'un filet gyratoire n'est plus constante durant le mouvement. La diminution que la force vive des mouvements gyratoires subit à raison du frottement interne peut facilement être déduite des équations du mouvement. Si l'on considère un élément fixe $d\tau$ de l'espace, l'expression de la force vive contenue dans cet élément est $\frac{1}{2} h (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau$; en prenant la variation par rapport au temps, et en intégrant sur toute l'étendue de la masse fluide, on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \int \left\{ h \left(u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \tfrac{1}{2} q^2 \frac{\partial h}{\partial t} \right\} d\tau; \quad \ldots (8)$$

T est la force vive du fluide entier; $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

Si l'on multiplie les équations (1) successivement par u, v, w, et qu'on additionne, il vient

$$h\left(u\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial t} \right) = h\left(u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z} \right) -$$

$$-\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{h}{2}\left(u\frac{\partial (q^2)}{\partial x} + v\frac{\partial (q^2)}{\partial y} + w\frac{\partial (q^2)}{\partial z} \right) +$$

$$+ \tfrac{1}{3} f \left(u\frac{\partial U}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial y} + w\frac{\partial U}{\partial z} \right) + f(u\,\Delta u + v\,\Delta v + w\,\Delta w).$$

Au lieu de cette équation on peut écrire, en vertu de la réduction précédente,

$$h\left(u\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial t}\right)=h\left(u\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}+w\frac{\partial V}{\partial z}\right)-$$
$$-\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\frac{h}{2}\left(u\frac{\partial(q^2)}{\partial x}+v\frac{\partial(q^2)}{\partial y}+w\frac{\partial(q^2)}{\partial z}\right)+$$
$$+\tfrac{4}{3}f\left(u\frac{\partial U}{\partial x}+v\frac{\partial U}{\partial y}+w\frac{\partial U}{\partial z}\right)+$$
$$+2f\left[u\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{dz}\right)+w\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right].$$

Intégrons cette équation sur la masse entière; désignons par α, β et γ les angles que la normale à un élément de surface fait avec les axes, par θ l'angle compris entre cette normale et la direction de la vitesse, enfin par $d\,s$ l'élément de surface; on trouvera, après réduction,

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\int d\,s\,\{(p-h\,V+\tfrac{1}{2}h\,q^2-\tfrac{4}{3}f\,U)\,q\,Cos\,\theta+$$
$$+2f[\xi(v\,Cos\gamma-w\,Cos\beta)+\eta(w\,Cos\alpha-u\,Cos\gamma)+\zeta(u\,Cos\beta-v\,Cos\alpha)]\}-$$
$$-\int\left\{4f(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\tfrac{1}{3}U^2)-p\,U-V\frac{\partial h}{\partial t}\right\}d\tau \quad .\ .\ .\ .\ (9)$$

Lorsque le fluide est limité par une paroi solide, ou lorsqu'il s'étend à l'infini, tandis que les filets gyratoires sont situés à des distances finies du système de coordonnées, on peut écrire

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\int\left\{4f(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\tfrac{1}{3}U^2)-pU-V\frac{\partial h}{\partial t}\right\}d\tau.$$

L'influence du frottement interne consiste donc à diminuer la force vive, et cette diminution, pour un fluide incompressible, est exprimée au temps t par l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-4f\int\{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\}\,d\tau,$$

si f est considéré comme une quantité constante.

En supposant que dans un fluide incompressible illimité, à un moment donné, tous les mouvements ont lieu dans des plans perpendiculaires à l'axe des z, que par conséquent tous les filets gyratoires sont rectilignes, on a les conditions

$$w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Ces valeurs, transportées dans (4), donnent

$$\frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{f}{h} \Delta \zeta \quad \text{. . . . . (10)}$$

Il suit de là que tous les filets gyratoires restent rectilignes; de la dernière de ces équations on déduit qu'ils se propagent de point en point, ainsi qu'il sera exposé plus en détail au § suivant.

Si dans un pareil fluide il n'existe, à un moment donné, que des filets gyratoires circulaires, situés dans des plans perpendiculaires à l'axe des z, de telle sorte que les centres des cercles se trouvent tous sur cet axe, on peut poser

$$\begin{aligned} x &= \varrho \operatorname{Cos} \theta, & \xi &= -\sigma \operatorname{Sin} \theta, & u &= s \operatorname{Cos} \theta, \\ y &= \varrho \operatorname{Sin} \theta, & \eta &= \sigma \operatorname{Cos} \theta, & v &= s \operatorname{Sin} \theta, \\ z &= z, & \zeta &= 0, & w &= w; \end{aligned}$$

où s et σ sont indépendants de l'angle θ. Introduisant ces valeurs dans les équations (4), on trouve

$$\frac{d(\sigma \operatorname{Sin} \theta)}{dt} = \frac{s\sigma}{\varrho} \operatorname{Sin} \theta + \frac{f}{h} \operatorname{Sin} \theta . \left(\Delta \sigma - \frac{\sigma}{\varrho^2} \right),$$

$$\frac{d(\sigma \operatorname{Cos} \theta)}{dt} = \frac{s\sigma}{\varrho} \operatorname{Cos} \theta + \frac{f}{h} \operatorname{Cos} \theta . \left(\Delta \sigma - \frac{\sigma}{\varrho^2} \right),$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Des deux premières de ces relations on déduit

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{s\sigma}{\varrho} + \frac{f}{h}\left(\Delta\sigma - \frac{\sigma}{\varrho^2}\right).$$

C'est l'équation du mouvement des filets circulaires.

Quand on admet que le mouvement dans un fluide incompressible est infiniment petit, les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme simple

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{f}{h}\Delta\xi, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{f}{h}\Delta\eta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{f}{h}\Delta\zeta; \quad \ldots\ldots (11)$$

et, si le mouvement est en outre stationnaire,

$$\Delta\xi = 0, \quad \Delta\eta = 0, \quad \Delta\zeta = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

équations sur lesquelles nous reviendrons au § 3.

§ 2.

Dans tout ce qui va suivre, le fluide sera supposé incompressible. Figurons-nous d'abord qu'il s'étende jusqu'à l'infini à l'un des côtés d'un plan. Faisons tomber dans ce plan deux des axes des coordonnées, et prenons la normale pour axe des z. Dans le plan limite naissent à un moment donné ($t = 0$) des mouvements gyratoires, ce qui est le cas lorsque deux fluides en mouvement s'y rencontrent de telle sorte que les vitesses normales se détruisent et que les vitesses tangentielles soient différentes. Supposons que tous les filets gyratoires tombent dans la direction de l'axe des x, et que la vitesse angulaire à un moment donné ait partout la même valeur. Si le frottement est négligé, on trouvera que le mouvement gyratoire reste toujours confiné dans le plan limite; mais s'il est tenu compte du frottement, ce mouvement se propagera dans toute la masse fluide.

La vitesse angulaire en un point quelconque dépendra du temps et de la distance de ce point au plan limite. Les équations

du mouvement deviennent ici, conformément aux formules (10),

$$\frac{d\eta}{dt}=0,\quad \frac{d\zeta}{dt}=0,\quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{f}{h}\Delta\,\xi.$$

Ainsi que l'a remarqué M. Helmholtz, la composante de la vitesse dont la direction touche une surface gyratoire et est perpendiculaire aux lignes gyratoires (ainsi la composante v dans le cas actuel) est différente aux deux côtés de la surface. Soit aux deux côtés $w=0$, l'équation du mouvement devient

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{f}{h}\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Cette équation subsiste aussi lorsque w n'est pas nul, mais que le mouvement est infiniment petit, de sorte que $w\frac{\partial\xi}{\partial z}$ puisse être négligé.

L'équation différentielle partielle est connue par la théorie de la chaleur. Elle peut être intégrée en ayant égard aux conditions limites

$$\xi=\xi_0 \quad \text{pour } z=0,$$
$$\xi=0 \quad \text{pour } t=0,$$

où ξ_0 est considéré comme une quantité constante par rapport au temps.

L'intégrale est

$$\xi=\frac{2\,\xi_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z}{2\sqrt{\frac{f}{h}t}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda \text{ [1]}.$$

Il résulte de là, comme on le trouvera démontré dans l'ouvrage ci-dessus cité, que les temps nécessaires pour que des points différents du fluide acquièrent une même vitesse angulaire sont

[1]) *Partielle Differentialgl. von* Riemann, *bearb. von* Hattendorff, 2e Aufl., p. 129.

entre eux comme les carrés de leurs distances au plan limite. Les temps après lesquels, dans des fluides différents, des vitesses angulaires égales ont pénétré à des distances égales, si les mouvements à leurs plans limites sont égaux, sont en raison directe des densités et en raison inverse des coefficients de frottement.

M. Zöppritz [1]) a traité le problème particulier d'un liquide, soumis à la pesanteur, qui s'étend à l'infini entre deux plans horizontaux. A l'une des surfaces est donnée une vitesse partout parallèle, l'autre surface est fixe. Lorsque cette dernière est supposée à une distance infinie, M. Zöppritz trouve, pour la vitesse qui après un temps donné a pénétré à une profondeur déterminée, la même intégrale que nous venons d'obtenir. De la même manière qu'il a calculé, au moyen de cette intégrale, après combien de temps un point situé à une distance de 100 mètres de la surface aura acquis la moitié de la vitesse de cette surface, on peut trouver aussi au bout de quel temps on aura, pour un pareil point, $\xi = \frac{1}{2}\xi_0$. D'après le calcul de M. Zöppritz, ce temps serait, pour l'eau, d'environ 239 ans. Les mouvements gyratoires se propagent donc très lentement. Après un temps infini, on a

$$\xi = \frac{2\xi_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda = \xi_0,$$

comme il était à prévoir. En prenant, comme conditions limites,

$$\xi = \varphi(z) \text{ pour } t = 0,$$
$$\xi = F(t) \text{ pour } z = 0,$$

on trouvera l'intégrale

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{\frac{f}{h}\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \varphi(\lambda)\, d\lambda \left(e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{4\frac{f}{h}t}} - e^{-\frac{(z+\lambda)^2}{4\frac{f}{h}t}} \right) + \right.$$
$$\left. + z \int_0^t F(\lambda)\, d\lambda\, e^{-\frac{z^2}{4\frac{f}{h}(t-\lambda)}} (t-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

[1]) *Annalen der Physik und Chemie*, Band III, p. 582.

Mais si la surface limite est une paroi solide, où le fluide est en repos, tandis qu'au sein de la masse on a pour $t=0$, $\xi=\xi_0$, il vient

$$\xi=\frac{\xi_0}{2\sqrt{\frac{f}{h}\pi t}}\int_0^\infty d\lambda\left(e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{4\frac{f}{h}t}}-e^{-\frac{(z+\lambda)^2}{4\frac{f}{h}t}}\right),$$

ce qui donne après réduction

$$\xi=\frac{2\xi_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\frac{f}{h}t}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

La vitesse angulaire, ainsi qu'il résulte de cette valeur, décroîtra de nouveau très lentement. On trouve, en effet,

$$\xi=\tfrac{1}{2}\xi_0,\ \text{lorsque}\ \frac{z}{2\sqrt{\frac{f}{h}t}}=0{,}4769.$$

Pour l'eau, on a $f=0{,}013$, de sorte que $z=0{,}1087\sqrt{t}$, si z est exprimé en centimètres et t en secondes. Après 1 seconde, la vitesse angulaire, à un peu plus de 1 millimètre de distance de la paroi solide, est donc réduite à la moitié de ce qu'elle était primitivement; au bout de 10000 secondes, cet état existe à une distance d'un peu plus de 1 mètre.

Si le fluide est compris entre deux surfaces parallèles, dont l'une est fixe, et au contact de laquelle nous supposons que les molécules fluides ne se déplacent pas, tandis qu'à l'autre surface la vitesse angulaires $\xi=\xi_1$ reste constante, l'intégrale de l'équation du mouvement doit être cherchée avec les conditions limites

$$\xi=0 \quad \text{pour } t=0,$$
$$\xi=0 \quad \text{pour } z=0,$$
$$\xi=\xi_1 \quad \text{pour } z=z_1.$$

Elle est (voir Riemann, *loc. cit.*, p. 146):

$$\xi = \xi_1 \left\{ \frac{z}{z_1} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\frac{f}{h}\left(\frac{n\pi}{z_1}\right)^2 t} Sin \frac{n\pi}{z_1} z \right\}.$$

Après un temps infini, on a $\xi = \xi_1 \frac{z}{z_1}$.

§ 3.

Représentons-nous un fluide incompressible illimité, dans lequel se trouve un ellipsoïde de révolution.

Faisons coïncider le centre de l'ellipsoïde avec l'origine des coordonnées, et donnons à son axe inégal la direction de l'axe des z. L'ellipsoïde étant en repos, le fluide est supposé se mouvoir partout, jusqu'à l'infini, avec la vitesse w_1 dans la direction de l'axe des z, et ce mouvement est pris infiniment petit. Désignons les demi-axes égaux par a, le demi-axe inégal par c. Lorsque le frottement est négligé, il y a un potentiel de la vitesse

$$\varphi = Kz \int_\mu^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2 \sqrt{c^2+\lambda}} + w_1 z, \text{ [1]}) \quad \ldots \ldots (14)$$

où K représente une constante, qui doit être déterminée à l'aide des conditions limites, et où μ est la plus grande racine de l'équation

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

De (14) on déduit les composantes de la vitesse

$$u' = -\frac{Kz \frac{\partial\mu}{\partial x}}{(a^2+\mu)^2 \sqrt{c^2+\mu}},$$

$$v' = -\frac{Kz \frac{\partial\mu}{\partial y}}{(a^2+\mu)^2 \sqrt{c^2+\mu}},$$

$$w' = -\frac{Kz \frac{\partial\mu}{\partial z}}{(a^2+\mu)^2 \sqrt{c^2+\mu}} + K\int_\mu^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2 \sqrt{c^2+\lambda}} + w_1.$$

[1]) Kirchhoff, *Mechanik*, p. 218.

Si l'on tient compte aussi du frottement, il faut trouver les composantes de la vitesse angulaire en chaque point du fluide. De la symétrie du corps on peut conclure que toutes les molécules se meuvent dans des plans passant par l'axe des z et qu'on peut poser

$$\xi = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \zeta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Or il est satisfait aux équations (12) si l'on admet que

$$\Delta P = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Supposons, en outre, que P soit fonction de μ seul; l'équation qui sert à déterminer cette fonction se change alors en

$$2\, R \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} + \frac{\partial R}{\partial \mu}\frac{\partial P}{\partial \mu} = 0,$$

si, pour abréger, on pose $R = (a^2 + \mu)^2 \, (c^2 + \mu)$.

Par l'intégration on trouve

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = \frac{C}{\sqrt{R}},$$

où C représente une constante, à déterminer ultérieurement. Une nouvelle intégration donnera

$$P = C \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{c^2 + \lambda}}.$$

Les composantes de la vitesse angulaire prennent, en vertu de (16), les valeurs

$$\xi = \frac{C \dfrac{\partial \mu}{\partial y}}{\sqrt{R}} \quad \eta = -\frac{C \dfrac{\partial \mu}{\partial x}}{\sqrt{R}}, \quad \zeta = 0.$$

Les fonctions L et M [voir équations (6) et (7)] sont déterminées par les équations différentielles

$$\Delta L = 2\, \xi, \quad \Delta M = -\, 2\, \eta.$$

Mais, d'après la supposition faite au sujet de la fonction P, on a

$$\Delta (y P) = y \Delta P + 2 \frac{\partial P}{\partial y},$$

ou, en vertu de (16) et (17),

$$\Delta (y P) = -2 \xi ;$$

de sorte que, dans ce cas, on trouve d'une manière très simple, pour les fonctions cherchées,

$$L = y P, \quad M = -x P.$$

Il en résulte, d'après l'équation (6), pour les composantes de la vitesse

$$u'' = -\frac{Cx \frac{\partial \mu}{\partial z}}{\sqrt{R}},$$

$$v'' = -\frac{Cy \frac{\partial \mu}{\partial z}}{\sqrt{R}},$$

$$w'' = -2C \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}} + \frac{Cx \frac{\partial \mu}{\partial x}}{\sqrt{R}} + \frac{Cy \frac{\partial \mu}{\partial y}}{\sqrt{R}} \quad . \; . \; (18)$$

La vitesse totale est maintenant connue. On a

$$u = u' + u'', \quad v = v' + v'', \quad w = w' + w''.$$

Les constantes K et C peuvent être déterminées de telle sorte qu'à la surface du corps soient remplies les conditions

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

A la surface de l'ellipsoïde, on a $\mu = 0$ et $R = a^4 c^2$. De la première équation (19) se déduit la relation

$$C = -K \frac{c^2}{a^4} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

La seconde équation ($v = 0$) donne le même résultat. La troisième équation (19) devient

$$0 = -\frac{Kz\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)_0}{a^4 c} + \frac{Cx\left(\frac{\partial\mu}{dx}\right)_0}{a^2 c} + \frac{Cy\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)_0}{a^2 c} + w_1 +$$

$$+ K\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{c^2+\lambda}} - 2C\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}.$$

On a, de plus, $\frac{x}{a^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)_0 + \frac{y}{a^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)_0 + \frac{z}{c^2}\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)_0 = 2.$

L'indice 0 signifie qu'il s'agit des valeurs des coefficients différentiels à la surface du corps. En substituant la valeur de C de (20), on trouve

$$w_1 = -\frac{2Kc}{a^4} + K\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{c^2+\lambda}} + 2K\frac{c^2}{a^4}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}}. \quad (21)$$

Au moyen de (20) et de (21) on peut calculer les constantes K et C. Les intégrales sont très faciles à réduire.

Si c'est une sphère qui se meut de la manière prescrite, les formules de la vitesse prennent une forme simple et connue; on a alors $\mu = r^2 - r_1^2$, r désignant la distance d'une molécule fluide à l'origine des coordonnées, et r_1 le rayon de la sphère. Cela résulte immédiatement de (15). Les composantes de la vitesse deviennent, dans ce cas,

$$\left.\begin{aligned} u &= -2K\frac{xz}{r^5} - 2C\frac{xz}{r^3}, \\ v &= -2K\frac{yz}{r^5} - 2C\frac{yz}{r^3}, \\ w &= -2K\left(\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{3r^3}\right) - 2C\left(\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right) + w_1. \end{aligned}\right\}\ldots(22)$$

La condition qu'à la surface de la sphère la vitesse soit nulle, donne

$$K = -\tfrac{3}{8} r_1^3 w_1, \quad C = \tfrac{3}{8} r_1 w_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (23)$$

Si le fluide glisse le long de la surface du corps, et que le coefficient de glissement g soit connu, on peut aussi, dans ce cas, calculer les quantités K et C en substituant les vitesses trouvées dans les formules pour les pressions,

$$X_x = p - 2f\frac{\partial u}{\partial x},\quad Y_z = Z_y = -f\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$Y_y = p - 2f\frac{\partial v}{\partial y},\quad Z_x = X_z = -f\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$Z_z = p - 2f\frac{\partial w}{\partial z},\quad X_y = Y_x = -f\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$ [1])

Suivant l'hypothèse indiquée dans l'introduction, on peut écrire

$$X_n - [X_n \, Cos(nx) + Y_n \, Cos(ny) + Z_n \, Cos(nz)] Cos(nx) = -g\,u,$$
$$Y_n - [X_n \, Cos(nx) + Y_n \, Cos(ny) + Z_n \, Cos(nz)] Cos(ny) = -g\,v,$$
$$Z_n - [X_n \, Cos(nx) + Y_n \, Cos(ny) + Z_n \, Cos(nz)] Cos(nz) = g(w_1 - w);$$ [2])

où n est la normale dans un élément de la surface limite entre le fluide et le corps solide. Or on a encore

$$X_n = X_x \, Cos\,(n\,x) + X_y \, Cos\,(n\,y) + X_z \, Cos\,(n\,z), \text{ etc.}$$

et à la surface, $Cos\,(n\,x) = \frac{x}{r_1}$, $Cos\,(n\,y) = \frac{y}{r_1}$, $Cos\,(n\,z) = \frac{z}{r_1}$.

Après quelques réductions, on trouvera

$$K = -\frac{3g\,r_1{}^4 w_1}{8(3\,f + r_1\,g)},\quad C = -\frac{K}{r_1{}^2}\left(\frac{2f}{r_1 g} + 1\right).$$

En posant ici $g = \infty$, on retrouve les formules (23). Si l'on prend au contraire $f = 0$ et $g = 0$, c'est-à-dire, si l'on ne tient aucun compte du frottement, et qu'on remarque qu'alors $C = 0$, on trouvera $K = \frac{3}{4}\,r_1{}^3\,w_1$, ce qui est conforme à la théorie ordinaire.

La résistance que la sphère éprouve, devient

$$W = -\frac{6\,\pi\,f\,g\,r_1{}^2}{3\,f + r_1\,g}\left(\frac{2\,f}{r_1\,g} + 1\right)w_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

---

[1]) Voir Kirchhoff, *Mechanik*, p. 370.

[2]) Voir Kirchhoff, *Mechanik*, p. 372.

Ces mêmes formules subsistent naturellement aussi lorsque le corps se meut avec la vitesse $-w_1$ dans la direction de l'axe des z et que le fluide est en repos à l'infini.

A l'aide des équations (22) on peut encore calculer les trajectoires des molécules fluides; comparons le résultat avec celui qu'on trouve en négligeant le frottement. Si l'on pose $x^2+y^2=\varrho^2$, les équations (22) deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= -2K\frac{\varrho z}{r^5} - 2C\frac{\varrho z}{r^3}, \\ \frac{dz}{dt} &= 2K\left(-\frac{z^2}{r^5}+\frac{1}{3r^3}\right) - 2C\left(\frac{z^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right)+w_1. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (25)$$

Soit en outre $K = K_1\, w_1\,,\quad C = C_1\, w_1\,,$

et introduisons de nouvelles variables, en substituant

$$z = r\ Cos\ \varphi\,,$$
$$\varrho = r\ Sin\ \varphi\,;$$

nous aurons, après quelques réductions,

$$Tang\ \varphi\, d\,\varphi = \frac{r^3 - 2\,C_1\,r^2 + \frac{2}{3}\,K_1}{r(r^3 - 4\,C_1\,r^2 - \frac{4}{3}\,K_1)}\,dr.$$

On peut intégrer cette équation, ce qui donnera

$$l\ Cos\,\varphi = l\sqrt{\frac{r}{2r^3 - 8\,C_1\,r^2 - \frac{8}{3}K_1}} + \text{constante.}$$

L'équation des trajectoires peut donc être mise sous la forme

$$\varrho^2\left(\frac{2\,r^3 - 8\,C_1\,r^2 - \frac{8}{3}\,K_1}{r^3}\right) = \text{constante.}$$

Quand $g = \infty$, cette équation devient

$$\varrho^2\left(\frac{2\,r^3 - 3\,r^2\,r_1 + r_1{}^3}{r^3}\right) = \text{constante} \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

Lorsqu'on pose au contraire $g = 0$ et $f = 0$, l'équation des trajectoires prend la forme

$$2\,\varrho^2 \left(\frac{r^3 - r_1^{\,3}}{r^3}\right) = \text{constante}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

qui toutefois reste applicable aussi au cas de mouvements finis.

L'équation des trajectoires montre que, pour $z = 0$, on a $\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0$, et que ϱ est alors un maximum. Si l'on prend pour une pareille courbe la constante $= 4\,r_1^{\,2}$, on trouve, dans les points où $z = 0$,

$$\text{pour } g = \infty, \qquad \varrho_0 = 2{,}281\,r_1,$$
$$\text{pour } f = 0 \text{ et } g = 0, \quad \varrho_0 = 1{,}618\,r_1.$$

Lorsque le fluide glisse le long de la surface de la sphère, la valeur de ϱ_0 dépend, en vertu des formules trouvées ci-dessus pour K et C, du rapport des coefficients f et g.

D'une manière analogue, le mouvement d'un corps pourrait aussi être déduit des équations (11), où ce mouvement est supposé infiniment petit, mais non stationnaire. Si le corps est un ellipsoïde de révolution, on obtient une équation différentielle compliquée, qui sera certainement très difficile à intégrer. Si le corps est une sphère, le problème peut, moyennant quelques hypothèses particulières sur la nature du mouvement, être résolu. On trouve à ce sujet, dans l'ouvrage déjà itérativement cité de M. Kirchhoff (p. 381), une exposition succincte, empruntée aux mémoires originaux de M. Stokes et de M. O. E. Meyer. Dans l'hypothèse que les vitesses ont des valeurs finies, la solution des problèmes en question, si l'on tient compte du frottement, est jusqu'ici inabordable.

CONTRIBUTION
À LA CONNAISSANCE DU COLLENCHYME,

PAR

C. VAN WISSELINGH.

Le 1er mai 1879, la Faculté des sciences de l'université d'Utrecht avait mis au concours l'étude du collenchyme, tissu qui non seulement offre de l'intérêt au point de vue anatomique et histologique, mais auquel, depuis les recherches de M. Schwendener et de M. Haberlandt, on attache aussi une grande importance comme partie du système mécanique de la plante.

En réponse à la question proposée, j'adressai à la Faculté, en avril 1880, un travail qui obtint une mention honorable. Depuis lors, M. Giltay, l'auteur du mémoire couronné, a fait connaître, dans la *Botanische Zeitung*, 1880, N°. 10, quelques-uns de ses résultats, et M. Ambronn a publié sur le collenchyme, dans les *Jahrbücher* de Pringsheim, t. XII, un travail étendu. Dans ces deux mémoires, toutefois, le collenchyme est envisagé comme système mécanique, tandis que mon étude a eu spécialement pour objet la forme et le développement du tissu. A raison de cette différence de point de vue, ainsi que de l'entière indépendance de mes observations, je crois donc pouvoir communiquer ici une partie des résultats auxquels elles m'ont conduit, en insistant particulièrement sur l'histoire du dévelop-

pement du collenchyme chez quelques-unes des plantes que j'ai examinées.

La publication de ces recherches, terminées déjà avant le 1er mai 1880, a été retardée par des circonstances indépendantes de ma volonté.

I. Forme des cellules.

En ce qui concerne la forme des cellules, le collenchyme présente la plus grande diversité. Tantôt elles ont la même dimension dans les trois sens (voir la tige d'*Evonymus latifolius* Mill. et Scop., Pl. II, fig. 13 et 14, et la feuille de *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. fig. 25 et 26), tantôt elles se sont beaucoup étendues dans le sens de la longueur et rétrécies aux extrémités (voir *Lamium purpureum* L. fig. 5 et *Aucuba japonica* L. fig. 10); dans ce dernier cas, elles sont presque toujours divisées en compartiments (*gefächert*) par des cloisons transverses horizontales, ordinairement minces, et aux deux bouts elles sont effilées en alène, ou bien terminées par des parois très obliques, qui se voient le mieux sur des coupes tangentielles [1]). Bien que M. Schwendener [2]) mentionne que ces parois obliques s'épaississent, le résultat de mes observations est qu'en géneral elles possèdent à peu près la même épaisseur que les cloisons transverses horizontales et que, dans les cas où ces dernières restent minces, les parois obliques terminales ne s'épaississent pas non plus: c'est ce qui a lieu, par exemple, chez *Tradescantia erecta* Jacq., *Lamium purpureum* L. (voir fig. 5), *Lamium album* L, *Rumex Hydrolapathum* Huds., *Sambucus nigra* L., *Macropiper excelsum* Miq. Les cloisons horizontales dont il vient d'être question se montrent en nombre très variable: tantôt elles sont très multipliées (*Abutilon striatum* Dicks.), d'autres fois on n'en rencontre qu'un petit nombre, et parfois elles manquent com-

[1]) Schwendener, *Mech. Princip im anat. Bau d. Monoc.*, p. 5.
[2]) *l. c.*, p. 5.

plètement, comme, par exemple, chez *Conium maculatum* L. La cavité des cellules présente ordinairement, sur la section transversale, un contour polygonal, arrondi ou ovale. Les parois longitudinales sont dans quelques cas épaissies sur toute leur étendue (*Aucuba japonica* L. fig. 9, *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. fig. 13 et 17, *Nerium Oleander* L. fig. 21, *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. fig. 25), dans d'autres cas elles le sont exclusivement aux angles, là où se réunissent trois ou un plus grand nombre de cellules (*Lamium purpureum* L. fig. 4 *p*). Les épaississements qui se trouvent en ces points possèdent souvent une forme polyédrique et paraissent ordinairement un peu gonflés. Outre ces épaississements polyédriques, j'en ai souvent rencontré d'autres en forme de côtes, qui se prolongent, parallèlement à l'épiderme, entre les couches de cellules: c'est ce qui se voit, par exemple, chez *Lamium purpureum* L. (voir fig. 4 *l*), *Chenopodium Bonus Henricus* L., *Sambucus nigra* L., *Melianthus major* L., *Silphium connatum* L., *Cichorium Intybus* L. Chez toutes les plantes que j'ai examinées, les parois, aux points où elles étaient tournées vers des espaces intercellulaires, se montraient constamment épaissies (voir, par exemple, *Aucuba japonica* L. fig. 9 et *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. fig. 25). Dans quelques cas, elles n'étaient épaissies que là (*Atropa Belladonna* L.). Dès que les parois longitudinales sont un peu épaissies sur toute leur étendue, j'y ai toujours vu des ponctuations. Ainsi que l'a remarqué M. Schwendener [1]), chez les formes prosenchymateuses ces ponctuations possèdent souvent l'apparence d'une fente (*Tradescantia erecta* Jacq., *Atherurus ternatus* Bl., *Conium maculatum* L., *Aegopodium Podagraria* L.) et sont placées dans la direction longitudinale ou dans une direction légèrement inclinée à gauche; chez les formes parenchymateuses, au contraire, elles ont fréquemment une forme ovale et sont placées en travers, par exemple, chez *Abutilon striatum* Dicks. (pétiole et limbe de la feuille),

---

[1]) *l. c.*, p. 5.

II. Forme, extension, limites et situation du tissu.

Sous le rapport de la forme, de l'extension, des limites et de la situation, le collenchyme présente beaucoup de diversité. Dans les tiges et les pétioles, il apparaît principalement sous la forme de faisceaux ou de couches annulaires. Les faisceaux, qui consistent en cellules de collenchyme prosenchymateuses, sont en général nettement limités, comme chez *Tradescantia erecta* Jacq., *Conium maculatum* L., *Lamium purpureum* L. (fig. 4), *Lamium album* L., *Chenopodium Bonus Henricus* L., *Rumex Hydrolapathum* Huds., *Sambucus nigra* L., *Vitis vinifera* L. et dans les pétioles de *Dieffenbachia Bausii*, *Xanthosoma versicolor*, *Homalonema rubescens*, *Atherurus ternatus* Bl., *Aegopodium Podagraria* L. Presque toujours ils sont en contact immédiat avec l'épiderme; rarement ils en sont séparés par une ou plusieurs couches de cellules parenchymateuses, par exemple, dans les pétioles de *Dieffenbachia Bausii* et de *Xanthosoma versicolor ;* suivant M. Schwendener [1]), la même chose s'observe dans la tige du *Levisticum officinale.* A l'extérieur, les faisceaux se montrent sous l'apparence de côtes saillantes (*Lamium purpureum* L. (fig. 4), *Lamium album* L., *Chenopodium Bonus Henricus* L., *Rumex Hydrolapathum* Huds., *Sambucus nigra* L., *Vitis vinifera* L, pétioles d'*Atherurus ternatus* Bl. et d'*Aegopodium Podagraria* L.), ou de stries d'une nuance plus claire que le tissu adjacent (*Conium maculatum* L.). Dans beaucoup de cas, ils se développent plus en largeur qu'en épaisseur, par exemple, chez *Tradescantia erecta* Jacq., *Conium maculatum* L., *Lamium album* L., *Chenopodium Bonus Henricus* L., *Rumex Hydrolapathum* Huds., *Sambucus nigra* L. Tant le volume que la position des faisceaux peuvent différer dans un même organe; c'est ainsi, par exemple, que dans la tige du *Conium maculatum* L. on

---

[1]) *l. c.*, p. 157.

trouve de gros faisceaux immédiatement sous l'épiderme et de plus minces à une petite distance. Dans quelques tiges et pétioles, il existe entre les gros faisceaux, immédiatement sous l'épiderme, encore une ou plusieurs couches de cellules collenchymateuses moins épaissies [1]) (tige de *Lamium purpureum* L. fig. 4, tige de *Lamium album* L., pétiole d'*Aegopodium Podagraria* L.).

Lorsque le collenchyme se présente sous la forme d'une couche disposée en anneau, il est pareillement, dans la plupart des cas, situé immédiatement sous l'épiderme; rarement il y a du parenchyme entre deux. Suivant M. Schwendener [2]), ce dernier cas se rencontre dans les tiges de *Macropiper excelsum*, *Althaea armeniaca* et *Cephalaria tartarica;* je l'ai observé aussi dans les tiges de *Althaea narbonensis* Pourr., *Abutilon striatum* Dicks., *Atropa Belladonna* L. et dans les pétioles des deux premières de ces plantes. Quelquefois les couches possèdent une telle épaisseur, que presque tout le tissu compris entre les faisceaux vasculaires et l'épiderme consiste en collenchyme [3]): c'est ce qui se voit, entre autres, chez *Aucuba japonica* L. (fig. 9), *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. et dans les pétioles d'*Evonymus latifolius* Mill. et Scop. et d'*Ilex Aquifolium* L.; dans d'autres cas, les couches ne sont composées que d'une seule assise de cellules ou d'un petit nombre d'assises. Parfois la couche de collenchyme est développée plus fortement à des places déterminées, qui alors s'accusent ordinairement à l'extérieur sous la forme de stries (tige d'*Evonymus latifolius* Mill. et Scop.) ou de côtes saillantes (tige de *Syringa vulgaris* L.). Dans les pétioles bilatéraux, le collenchyme est souvent plus développé aux angles (*Evonymus latifolius* Mill. et Scop.), ou y forme des faisceaux (*Syringa vulgaris* L.). Quand le collenchyme est disposé en couche annulaire, il offre de grandes différences quant à

---

[1]) De Bary, *Vergl. Anat.* p. 420 (*Handb. d. phys. Bot.* Bd. III).
[2]) *l. c.*, p. 157.
[3]) Dippel, *l. c.*, p. 154.

sa délimitation. Tantôt il est nettement séparé du parenchyme, par exemple chez *Althaea narbonensis* Pourr., *Abutilon striatum* Dicks., *Phytolacca dioica* L, *Caladium Bellemy;* tantôt il passe à ce tissu d'une manière insensible, comme chez *Nerium Oleander* L., *Aucuba japonica* L. (fig. 9), *Melianthus major* L., *Silphium connatum* L., *Cichorium Intybus* L., *Peperomia incana* Drch., *Helleborus niger* L., *Evonymus latifolius* Mill. et Scop., *Ilex Aquifolium* L., *Veronica speciosa Hendersoni* Hort., *Euphorbia splendens* Boj., *Castanea vesca* Gaertn., *Cotyledon coccinea* Cav. Dans la plupart des cas, j'ai trouvé que ce passage était caractérisé, non seulement par la diminution graduelle de l'épaississement des parois cellulaires, mais aussi par le fait que les cavités des cellules devenaient plus larges et plus courtes, que les méats intercellulaires apparaissaient ou augmentaient en nombre et en volume, et que parfois le contenu des cellules devenait plus riche en chlorophylle.

Là où le collenchyme est développé en faisceaux, les stomates se trouvent sur les parties de l'épiderme qui sont situées entre les faisceaux. Lorsqu'il affecte la forme de couche, son épaisseur est réduite sous les stomates et il y est pourvu de cavités aériennes communiquant avec ceux-ci, ou bien il y alterne avec de petites traînées de parenchyme à chlorophylle, qui se présentent parfois comme des taches ou des portions de lignes, de couleur verte, ainsi qu'on le voit chez *Hedera Helix* L. [1]).

De même que la forme des cellules individuelles, la forme, l'extension, la délimitation et la place des masses cellulaires peuvent aussi différer plus ou moins dans la tige et le pétiole d'une seule et même plante.

Le collenchyme du pétiole se continue presque toujours au-dessus et au-dessous des nervures et le long des bords du limbe de la feuille. Au-dessus et au-dessous des grosses nervures, il forme ordinairement des bandes sous-épidermiques; à la face inférieure de la feuille ces bandes sont les plus larges; à la face supérieure elles

[1]) De Bary, *l. c.*, p. 51.

prennent fréquemment la forme de faisceaux, qui souvent font une forte saillie extérieure. Quelquefois le collenchyme forme au-dessus et au-dessous d'une nervure plusieurs faisceaux, séparés par du parenchyme, comme chez *Chenopodium Bonus Henricus* L., *Rumex Hydrolapathum* Huds., *Dieffenbachia Bausii*, *Xanthosoma versicolor*, *Homalonema rubescens*. A la face supérieure des feuilles, le collenchyme manque parfois; tel est le cas chez *Aucuba japonica* L., *Caladium Bellemy*, *Xanthosoma versicolor*, *Homalonema rubescens*. Sous le rapport de l'extension et de la délimitation du collenchyme, ce qui a été dit de la tige et des pétioles s'applique aussi aux limbes des feuilles. Le collenchyme qui se trouve au-dessus et au-dessous des nervures se continue quelquefois, en formant une ou plusieurs assises de cellules plus ou moins épaissies, sous l'épiderme du limbe foliaire, soit à la face supérieure et à la face inférieure (*Nerium Oleander* L.), soit à la face supérieure seule (*Ilex Aquifolium* L., *Veronica speciosa Hendersoni* Hort.). Chez les Dicotylédones, on trouve souvent le long des bords de la feuille une bordure de collenchyme, formée de plusieurs assises de cellules [1]) (collenchyme marginal). Là, où le collenchyme apparaît sous l'épiderme du limbe, les stomates font généralement défaut.

J'ai trouvé le collenchyme fortement développé surtout dans les écailles de beaucoup de bourgeons (*Evonymus latifolius* Mill. et Scop., *Aucuba japonica* L., *Hedera Helix* L.); non seulement tout le tissu fondamental, mais aussi les fibres libériennes et l'épiderme y consistent souvent en éléments épaissis, collenchymateux. Au point de vue mécanique, cette structure a évidemment une grande importance, vu que les écailles des bourgeons servent à soutenir et à protéger les parties végétales encore très jeunes.

III. Développement.

1. *Lamium purpureum* L. (tige).

Aux quatre angles de la tige se trouvent, immédiatement

[1]) G. Kraus, Pringsh. *Jahrb.*, IV, p. 307.

sous l'épiderme, autant de faisceaux collenchymateux, fortement saillants (fig. 4). Ces faisceaux sont situés vis-à-vis des quatre plus gros faisceaux vasculaires, dont ils sont séparés par trois ou quatre rangées de cellules parenchymateuses. Ils sont vigoureusement développés et nettement limités. A la limite, on trouve quelquefois des espaces intercellulaires dans le collenchyme (fig. 4 *i* et i_1), mais à une certaine distance on en voit très rarement; dans ce dernier cas, ils sont petits et toujours arrondis (fig. 4 *a*). Les cellules collenchymateuses sont très allongées, rétrécies en pointe aux extrémités (fig. 5 *u*), pourvues de ponctuations sur les parois longitudinales (fig. 5 *s*) et cloisonnées par de minces lames transverses, horizontales (fig. 5 *d*). Sur la coupe transversale, les cavités sont petites et de figure anguleuse. Aux angles, les cellules sont munies de forts épaississements polyédriques, qui paraissent gonflés (fig. 4 *p*); immédiatement sous l'épiderme et dans son voisinage, on trouve des épaississements en forme de côtes (fig. 4 *l*). Entre les faisceaux de collenchyme, la première couche cellulaire sous-épidermique possède, en beaucoup d'endroits, des parois à épaississement collenchymateux plus ou moins prononcé. En certains points, surtout vis-à-vis des petits faisceaux vasculaires, il en est de même de quelques couches cellulaires plus profondes.

A l'état le plus jeune que j'aie étudié, la tige présentait déjà une forme obtusément carrée. Les angles arrondis faisaient déjà une légère saillie. Vis-à-vis de chacun de ces angles, il y avait un faisceau de procambium, — futur faisceau vasculaire, — et dans l'un de ces faisceaux de procambium existait déjà un vaisseau spiralé. Un autre de ces faisceaux était séparé de l'épiderme par deux rangées de cellules presque rondes, dont les parois ne montraient encore aucune trace d'épaississement collenchymateux; entre ces deux rangées de cellules on voyait distinctement des espaces intercellulaires, et probablement il y en avait aussi entre la rangée extérieure et l'épiderme. Il ressort déjà de là que la première ébauche du faisceau vasculaire est antérieure à celle du collenchyme. Dans les entre-nœuds très jeunes (fig. 1),

ayant une longueur à peine perceptible à l'œil nu, on trouve, entre les cellules épidermiques situées aux angles et les faisceaux vasculaires (fig. 1 *v*), 5, 6 ou 7 cellules. Des méats intercellulaires existent en beaucoup de points (fig. 1 *i*), parfois même entre l'épiderme et la couche cellulaire sous-jacente. Ces méats ont quelquefois une grandeur considérable; c'est ce qui se voit entre autres, de temps en temps, entre la première et la seconde couche de cellules (l'épiderme n'étant pas compté). Ils s'étendent alors parallèlement à l'épiderme et sont limités par plusieurs cellules de chacune des deux couches. Dans quelques uns des entre-nœuds en question, il n'y a encore aucune apparence d'épaississement collenchymateux; dans d'autres, au contraire, on en observe déjà un commencement. Les premières traces en apparaissent aux angles, entre les cellules de l'épiderme et celles de la première couche de cellules sous-épidermiques. Ensuite, pendant que ces dernières continuent à épaissir leurs parois, le processus s'étend le long de l'épiderme et se manifeste aussi dans les couches cellulaires suivantes. De cette manière, il se produit temporairement un passage, ordinairement très graduel, du collenchyme au parenchyme, passage que caractérisent, outre le décroissement d'épaisseur des parois, la forme de plus en plus arrondie et les dimensions de plus en plus grandes des cavités, ainsi que l'apparition d'interstices entre les cellules (voir fig. 3).

Tandis que dans les entre-nœuds jeunes, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, on trouve 5, 6 ou 7 cellules entre chaque faisceau vasculaire et l'épiderme, dans l'état adulte chaque faisceau collenchymateux a une épaisseur d'environ 15 cellules et est séparé du faisceau vasculaire voisin par 3 ou 4 rangées de cellules parenchymateuses (voir fig. 4). Comme le nombre des cellules de l'épiderme s'accroît exclusivement par des divisions radiales, il faut nécessairement qu'ailleurs il s'opère aussi des divisions cellulaires longitudinales. Celles-ci, toutefois, ne s'observent jamais dans les cellules qui ont subi un épaississement collenchymateux notable, mais bien dans celles dont les parois

ne sont encore que peu ou point épaissies. Dans les entre-nœuds jeunes dont il a été question plus haut, on rencontre çà et là ces divisions dans des cellules situées à l'un des angles et immédiatement sous l'épiderme (fig. 1 *d*). Dans les entre-nœuds plus âgés, au contraire, elles sont limitées aux cellules du parenchyme et de la zone de transition. A mesure que l'épaississement collenchymateux s'étend, le nombre des cellules augmente; il en résulte que le collenchyme est toujours séparé du faisceau vasculaire par quelques rangées de cellules à parois minces, ordinairement par trois ou quatre de ces rangées et par un nombre plus grand dans les entre-nœuds jeunes (voir fig. 1 et 3).

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné ci-dessus, on trouve dans les entre-nœuds jeunes, entre les cellules à parois minces ou déjà un peu épaissies qui donnent naissance aux fibres collenchymateuses, des espaces intercellulaires nombreux et souvent très grands, tandis qu'à l'état adulte le collenchyme n'en présente que rarement. La raison en est que les parois cellulaires sont surtout disposées à s'épaissir là où elles sont tournées vers des méats intercellulaires. Pendant que celles-là augmentent en épaisseur, ceux-ci décroissent en volume et finalement disparaissent tout à fait. Les places où se trouvaient primitivement les méats intercellulaires sont alors occupées par des épaississements polyédriques (fig. 3 et 4 *p*) ou en forme de côtes (fig. 3 et 4 *l*). Ces derniers sont ordinairement rapprochés de l'épiderme et parallèles à sa surface, tout comme les grands méats intercellulaires ci-dessus décrits (fig. 3 $i_{\prime}$ et $i_{\prime\prime}$), qu'ils ont remplacés. Ce sont d'abord les parois à l'une des extrémités d'un grand espace intercellulaire qui commencent à s'épaissir, puis successivement, à mesure que le collenchyme s'étend, les autres parois par lesquelles l'interstice est circonscrit. De là vient que, dans les entre-nœuds non adultes, on trouve des épaississements en forme de côtes qui passent insensiblement à de grands méats intercellulaires (fig. 3 $i_{\prime\prime}$). Souvent même cela peut encore s'observer dans l'état adulte, mais le passage est alors moins graduel, parce que, dans la dernière

période de son développement, le collenchyme prend des limites bien tranchées. Les épaississements polyédriques se forment à la place des méats intercellulaires de moindres dimensions. Ceux-ci, avant de disparaître entièrement, s'arrondissent; les grands se comportent de la même manière. De pareils méats intercellulaires arrondis se rencontrent fréquemment dans les entre-nœuds encore jeunes (fig. 3 *a*); dans l'état adulte, au contraire, ils sont rares (fig. 4 *a*).

Les coupes longitudinales (fig. 2) d'entre-nœuds qui ont atteint la longueur où ils commencent à devenir visibles à l'œil nu, montrent que le collenchyme se forme aux dépens du parenchyme. Des cellules dont les parois possédaient déjà un léger épaississement collenchymateux n'avaient, en moyenne, qu'une longueur égale au double de leur largeur et reposaient l'une sur l'autre par des parois transverses horizontales ou parfois un peu obliques. Les extrémités pointues se forment donc dans la suite du développement, ce qui est confirmé par les coupes longitudinales d'entre-nœuds plus âgés et plus étendus en longueur. Les parois transverses restées horizontales doivent probablement naissance aux dernières divisions cellulaires.

Dans la première, puis souvent aussi dans la seconde couche cellulaire sous-épidermique, couches qui sont situées entre les faisceaux de collenchyme, l'épaississement collenchymateux apparaît, relativement, d'assez bonne heure.

La description qui vient d'être donnée du développement du collenchyme chez *Lamium purpureum* montre que, sous plusieurs rapports, les résultats de mes observations diffèrent beaucoup de ceux obtenus par M. Haberlandt [1]). Suivant cet auteur, le collenchyme dérive du cambium, tissu générateur prosenchymateux, provenant de la division longitudinale répétée de cellules mères méristématiques et apparaissant à peu près en même temps que le cambium mestomatique. D'après mes recherches, au contraire, le collenchyme dériverait d'un tissu parenchyma-

[1]) *l. c.*, p. 58.

teux et les faisceaux vasculaires existeraient déjà, comme procambium, alors qu'il n'y a encore aucune trace sensible de faisceaux collenchymateux. M. Haberlandt parle de la connexion entre la „*Collenchymanlage*" (premiers rudiments du faisceau collenchymateux) et le cambium mestomatique, tandis que j'ai trouvé, aussi bien à l'état adulte que dans le jeune âge, que le collenchyme est toujours séparé des faisceaux vasculaires par du parenchyme à parois minces. Suivant M. Haberlandt, la „*Collenchymanlage*" est entièrement dépourvue d'interstices, tandis que j'ai toujours vu, entre les cellules à parois minces ou peu épaissies d'où naît le collenchyme, des interstices nombreux et souvent même assez grands.

2. *Lamium album* L.
(tige).

Le collenchyme de la tige adulte de cette plante ressemble, sous la plupart des rapports, à celui de l'espèce précédente. Toutefois, les faisceaux se sont plus développés dans le sens de la largeur et font une saillie extérieure moins forte, tandis que les épaississements en forme de côtes, sauf entre l'épiderme et la première couche sous-épidermique, sont plus rares.

Dans l'état le plus jeune que j'aie examiné, la tige possédait une forme carrée à angles arrondis. En face de chaque angle il y avait un faisceau procambial, séparé de l'épiderme par environ quatre assises de cellules. Entre ces cellules, dont les parois ne présentaient encore aucun vestige d'épaississement collenchymateux, existaient des espaces intercellulaires très distincts. Tandis que le nombre des cellules de l'épiderme augmente exclusivement par voie de division suivant la direction radiale, dans le tissu situé entre lui et les faisceaux vasculaires il s'opère des segmentations suivant différentes directions. Avant que les entre-nœuds aient atteint une longueur de 2 mm., le nombre des couches cellulaires comprises entre l'épiderme et les faisceaux vasculaires peut déjà s'élever à envi-

ron 13. Entre-temps, les faisceaux vasculaires ont acquis quelques vaisseaux et les faisceaux collenchymateux ont commencé à se former. Les cellules d'une grande partie des couches (environ 9) ont déjà un peu épaissi leurs parois et se distinguent en outre des cellules parenchymateuses par leurs cavités plus étroites; toutefois, il n'y a pas encore de démarcation tranchée entre le collenchyme et le parenchyme: de l'un à l'autre de ces tissus, la transition est graduelle. Dans des entre-nœuds de 4, 7 et 9 mm. de longueur, cette transition est marquée non seulement par la diminution progressive de l'épaississement, mais aussi par l'amplification des cavités des cellules, par l'apparition d'espaces intercellulaires arrondis et par la présence, çà et là, d'un épaississement en forme de côte, qui passe insensiblement à un espace intercellulaire. Dans les entre-nœuds de 9 mm. de longueur, je n'ai plus observé de divisions de cellules entre les faisceaux vasculaires et l'épiderme. Les faisceaux collenchymateux comptent alors dans leur épaisseur à peu près le même nombre d'assises cellulaires qu'à l'état adulte. L'épaississement des parois des cellules, qui entre-temps a fait de notables progrès, continue à augmenter. La démarcation entre le collenchyme et le parenchyme limitrophe devient peu à peu plus tranchée; c'est ce qui est déjà visible sur des entre-nœuds de 2½ et 3½ cm. En même temps, la saillie extérieure des faisceaux collenchymateux, qui est beaucoup plus prononcée dans l'état jeune que dans l'état adulte, commence à diminuer. L'épaississement des parois s'accompagne aussi, chez le *Lamium album* tout comme chez le *Lamium purpureum*, de la disparition des espaces intercellulaires; les petits espaces intercellulaires arrondis, qu'on rencontre dans l'état adulte ou sub-adulte, sont les restes d'insterstices plus grands.

C'est sur des entre-nœuds de 4 mm. de long que j'ai observé les premiers signes d'épaississement collenchymateux dans les couches cellulaires sous-épidermiques, entre les faisceaux du collenchyme.

3. *Aucuba japonica* L.
(tige).

La tige de cette plante offre, immédiatement sous l'épiderme, une couche de collenchyme en cercle continu, qui possède une épaisseur notable et passe très graduellement au parenchyme. Dans les couches cellulaires externes on ne trouve pas d'espaces intercellulaires; ils existent en grand nombre, au contraire, dans les couches plus profondes et dans la partie qui forme le passage au parenchyme (fig. 9 *i*). Ils atteignent souvent des dimensions assez considérables; les petits sont parfois un peu arrondis (fig. 9 *a*). Le collenchyme consiste en fibres allongées, pointues aux extrémités (fig. 10 *u*), divisées en compartiments par des cloisons transverses plus ou moins épaisses (fig. 10 *d*) et pourvues de ponctuations très grosses sur les parois longitudinales (fig. 10 *s*). Sur la coupe transversale, les cellules présentent de grandes cavités ovales ou parfois rondes, et on constate que les parois longitudinales se sont fortement épaissies sur toute leur étendue et que les parois transverses sont ponctuées (fig. 9 s_1). Dans le contenu, on voit de très gros grains de chlorophylle. La première couche cellulaire sous-épidermique possède à son côté externe des parois peu épaissies, et les dimensions de ses cellules diffèrent peu dans les trois sens de l'étendue.

Entre l'épiderme et un faisceau procambial qui venait de se former (fig. 6 *v*), se trouvaient, dans les états les plus jeunes dont j'aie fait l'étude, 3, 4 ou 5 assises de cellules à parois minces, qui étaient arrondies et de grandeur égale. Entre ces assises il y avait des espaces intercellulaires (fig. 6 *i*), mais on n'en voyait pas entre l'épiderme et la première couche sous-épidermique. Quelques-unes des cellules susdites présentaient des divisions radiales (fig. 6 *d*), et dans la couche externe on observait aussi quelques divisions tangentielles. L'épiderme augmente le nombre de ses cellules exclusivement par voie de division radiale. Dans la couche cellulaire immédiatement sous-jacente,

il s'opère de nombreuses divisions tangentielles (fig. 7 d_1) et peu de divisions radiales ; celles-ci sont au contraire fréquentes dans les autres cellules de l'écorce (fig. 7 *d*), tandis que les divisions tangentielles ne s'y rencontrent que très parcimonieusement. J'ai observé le début de l'épaississement collenchymateux dans des entre-nœuds dont l'écorce consistait en 7, 8 et 9 couches de cellules. Il faisait d'ordinaire complètement défaut aux places où l'épiderme se trouvait le plus rapproché des faisceaux vasculaires. Là où l'écorce avait pris plus de développement, c'étaient surtout les deuxième et troisième couches cellulaires qui possédaient des membranes un peu plus épaisses que les couches, à parois minces, situées en-dessous. L'épaississement diminuait peu à peu vers l'intérieur, tandis que les espaces intercellulaires, qui existaient entre toutes les couches de cellules de l'écorce, croissaient en volume. Longtemps l'épaississement collenchymateux reste de médiocre importance; dans les entre-nœuds qui présentent 10 ou 11 cellules entre l'épiderme et les faisceaux vasculaires, les parois des cellules corticales ne sont encore que peu épaissies (fig. 7). L'accroissement en épaisseur des parois cellulaires ne se prononce fortement que vers le moment où les bourgeons s'épanouissent. L'écorce compte alors dans son épaisseur presque autant de couches de cellules qu'à l'état adulte. Je n'ai pu décider sûrement si le progrès de l'épaississement s'accompagne de la disparition de quelques espaces intercellulaires. La chose est probable, parce que les interstices entre les couches cellulaires externes de l'écorce sont plus rares dans l'état adulte qu'à une période moins avancée du développement et parce que ceux de dimension médiocre possèdent souvent une forme arrondie (fig. 9 *a*).

Dans les entre-nœuds dont l'écorce était composée d'environ dix rangées de cellules, la plupart des cellules collenchymateuses montraient des divisions transversales (fig. 8 *d*); elles avaient à peu près la même dimension dans les trois sens et reposaient les unes sur les autres par des parois le plus souvent horizontales, ou quelquefois un peu obliques (fig. 8 d_1). Or, comme

dans l'état adulte les fibres collenchymateuses sont très pointues (fig. 10 *u*), il résulte de ce qui précède que ces extrémités effilées n'apparaissent pas dès le début, mais se forment au cours du développément.

4. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. (tige).

Dans la tige de cette plante on trouve, immédiatement sous l'épiderme, une couche annulaire de collenchyme, qui en dedans passe insensiblement au parenchyme. Les espaces intercellulaires sont nombreux dans le collenchyme (fig. 13 *i*); ils atteignent souvent d'assez grandes dimensions; ceux de grandeur médiocre sont en général arrondis. Les cellules collenchymateuses ont à peu près la même dimension dans les trois sens de l'étendue et se terminent par des parois transverses épaissies, horizontales ou obliques; quelquefois elles sont un peu rétrécies en pointe aux extrémités (fig. 14). Leurs parois longitudinales sont pourvues de nombreuses ponctuations (fig. 14 *s*), qui souvent possèdent une forme plus ou moins ovale et sont placées en travers. Sur la coupe transversale (fig. 13), les cavités des cellules sont ovales ou arrondies et les parois longitudinales se montrent épaissies dans toute leur étendue les parois transverses présentent des ponctuations (fig. 13 *s*). Dans le contenu cellulaire on rencontre de la chlorophylle. En quelques points, là où l'épiderme est muni de stomates, les cellules des couches cellulaires externes sont peu ou point épaissies. Aux quatre côtés de la tige (fig. 29 c_1) qui, vus du dehors, apparaissent comme des lignes longitudinales d'une nuance plus claire que le tissu adjacent, et où commence d'ordinaire la formation du liège dans l'épiderme, le collenchyme est dépourvu d'espaces intercellulaires et montre, sur la coupe transversale, des parois plus épaisses et des cavités plus petites, tandis que le contenu des cellules ne renferme pas de chlorophylle, ou n'en renferme que peu.

A l'époque où les faisceaux vasculaires sont encore dans l'état purement procambial (fig. 11 *v*), c'est seulement entre l'épiderme et la couche cellulaire immédiatement sous-jacente qu'on observe un léger épaississement aux angles des cellules (fig. 11 v_1). Les faisceaux vasculaires sont alors séparés de l'épiderme par au moins quatre couches de cellules. Des espaces intercellulaires existent entre les trois couches internes (fig. 11 *i*), très probablement aussi entre la couche externe et celle qui la suit, mais jamais entre la couche externe et l'épiderme. Tandis que l'épiderme subit exclusivement des divisions radiales (fig. 11 d_{11}), la première couche sous-épidermique est le siège de nombreuses divisions tangentielles (fig. 11 d_1) et de très peu de divisions radiales (fig. 11 *d*). Dans les autres couches cellulaires, il s'opère à la fois des divisions tangentielles, radiales et obliques. Après que les susdites divisions se sont répétées suffisamment, on observe une certaine différence entre les couches cellulaires externes et internes de l'écorce. Les premières en effet sont dépourvues d'interstices, tandis qu'il s'en montre, à mesure qu'on avance vers l'intérieur, d'abord de petits et ensuite aussi de plus grands (fig. 12 *i*), en même temps que les cellules deviennent plus grosses. L'épaississement collenchymateux reste pendant longtemps réduit à la faible augmentation d'épaisseur près de l'épiderme; cela peut même être le cas dans des entre-nœuds encore enveloppés il est vrai par les écailles du bourgeon, mais dont l'écorce compte déjà 13 assises de cellules dans son épaisseur (fig. 12 v_1). Aussitôt que les bourgeons s'ouvrent, toutefois, l'épaississement collenchymateux commence à s'accentuer fortement et partout à peu près simultanément. Je n'ai pu constater d'une manière certaine si les progrès de l'épaississement font disparaître quelques espaces intercellulaires; il y a lieu de le présumer, si l'on considère que dans l'état adulte les petits interstices ont une forme arrondie, tandis que les grands ont généralement perdu leurs angles aigus.

Ainsi qu'il vient d'être dit, l'épaississement collenchymateux des cellules corticales ne commence qu'assez tard; sous ce rap-

port, toutefois, il faut faire une exception pour les quatre parties de la tige qui à l'extérieur se dessinent comme des lignes longitudinales d'une nuance plus claire que le tissu adjacent. Ici, l'épaississement apparaît déjà lorsque les faisceaux vasculaires sont encore entièrement à l'état procambial; et alors que les espaces intermédiares n'en présentent encore aucune trace, dans les parties susdites il s'est déjà formé de petits faisceaux collenchymateux, qui d'ordinaire sont presque complètement exempts d'interstices, et dont les cellules possèdent des parois assez épaisses et des cavités assez petites.

Suivant M. Sanio [1]), dans les entre-nœuds très jeunes, la plus externe des quatre couches cellulaires qui composent l'écorce primaire se détache facilement avec l'épiderme, et c'est de cette couche cellulaire externe que dérive la couche collenchymateuse aisément séparable. Sur des coupes d'entre-nœuds, adultes et non adultes, examinés en hiver, après une gelée forte et prolongée, j'ai toujours trouvé que l'épiderme, avec une (fig. 11) ou plusieurs (fig. 13) couches cellulaires sous-jacentes, s'était détaché. Aux quatre places où débute l'épaississement collenchymateux, la liaison toutefois n'était jamais rompue complètement. D'autres entre-nœuds, d'âges divers, étudiés en septembre 1879 et en avril 1880, ne m'ont au contraire jamais montré la séparation d'une partie de l'écorce. Il faut en conclure que le tissu cellulaire avait été déchiré par la gelée. Dans des entre-nœuds non adultes, que j'examinai au commencement du mois d'avril, la connexion, rompue en hiver, se trouvait rétablie. Les parois cellulaires, que la déchirure avait séparées les unes des autres, s'étaient remises en contact et ressoudées. En y regardant de très près, on pouvait encore reconnaître, au mode d'agencement des cellules, l'endroit où le tissu avait offert antérieurement une solution de continuité. Les déchirures ne peuvent en aucun cas être regardées comme marquant la limite entre le collenchyme et le parenchyme, attendu

---

[1]) *Bot. Ztg.*, 1863, p. 363.

qu'il n'y a jamais la moindre différence constante entre les cellules qui bordent les deux côtés de ces fentes. Je présume que ce sont les déchirures en question, produites par la gelée, qui ont conduit M. Sanio à l'assertion ci-dessus rappelée, savoir que, chez l'*Evonymus latifolius*, une seule couche cellulaire sous-épidermique, qui se détache facilement du tissu sous-jacent, donne naissance à la couche collenchymateuse, douée de la même propriété.

5. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. (pédoncule).

Dans le pédoncule on trouve, immédiatement sous l'épiderme, une couche annulaire de collenchyme, lequel alterne sur quelques points avec du parenchyme, auquel il passe aussi par sa face interne. Le collenchyme ne renferme que de rares espaces intercellulaires; ceux-ci sont au contraire très nombreux dans le parenchyme et ils y atteignent souvent de grandes dimensions. Les cellules collenchymateuses sont allongées, terminées en pointe aux extrémités et cloisonnées par des parois transverses horizontales; tant sur les parois longitudinales que sur les parois transverses, elles sont munies de ponctuations. Sur la coupe transversale, elles montrent des cavités rondes ou ovales et des parois épaissies sur toute leur étendue.

En examinant différents pédoncules encore cachés sous les écailles du bouton, j'ai constaté qu'il s'y était formé quelques vaisseaux dans les faisceaux vasculaires et que l'écorce consistait en 4, 5 ou 6 couches de cellules, presque autant qu'à l'état adulte. Dans l'écorce, toutes les cellules étaient à parois minces et à peu près de même grandeur. Partout on y voyait des espaces intercellulaires, qui manquaient au contraire entre sa couche externe et l'épiderme, point où les parois des cellules corticales étaient un peu épaissies. Tandis que les cellules de

l'épiderme se segmentent exclusivement dans le sens radial, celles de l'écorce subissent des divisions tant longitudinales que radiales ; les premières sont les plus fréquentes.. A l'époque où les boutons s'ouvrent, l'épaississement collenchymateux commence à se développer vigoureusement: dans des pédoncules de 6 mm. de longueur, il était déjà bien prononcé dans les trois couches cellulaires externes. A l'état jeune aussi bien qu'à l'état adulte, le collenchyme passe toujours graduellement au parenchyme ; à part la diminution d'épaisseur des parois, ce passage est encore caractérisé par la multiplication des espaces intercellulaires et l'accroissement de grandeur des cellules.

6. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop.

(feuille). [1])

La feuille présente une zone de collenchyme au-dessus et au-dessous de la nervure principale, immédiatement sous l'épiderme. A la face inférieure, on trouve peu d'espaces intercellulaires dans ce collenchyme; ils sont toujours arrondis (fig. 17 *a*). Les cellules collenchymateuses sont passablement allongées et se terminent par de minces cloisons transverses, horizontales ou obliques, ou bien s'atténuent en pointe à l'une des extrémités (fig. 18); leurs parois longitudinales sont couvertes de ponctuations, dont la plupart affectent une forme plus ou moins ovale et sont placées en travers (fig. 18 *s*). Sur la coupe transversale (fig. 17), les cellules montrent des cavités rondes et des parois partout épaissies ; des ponctuations se voient sur les parois transverses. Les couches cellulaires externes possèdent les parois les plus épaissies et les cavités les plus petites ; en allant vers l'intérieur, ces dernières deviennent plus grandes et l'épaississement diminue. Les cellules contiguës au liber ont généralement

---

[1]) Les coupes qui ont servi à l'étude du développement, dans les trois cas suivants, étaient prises vers le milieu des feuilles.

des parois encore un peu épaissies. A la face supérieure de la feuille, le collenchyme est limité assez nettement par le parenchyme. Entre les cellules fortement épaissies il n'existe pas d'espaces intercellulaires.

Dans les feuilles les plus jeunes que j'aie examinées, il y avait à la face inférieure, entre l'épiderme et les faisceaux vasculaires, dans lesquels les premiers vaisseaux commençaient à se former, trois rangées de cellules à parois minces, qui partout offraient des interstices (fig. 15 *i*). Seulement entre l'épiderme et la première couche sous-épidermique, aux angles des cellules, s'observait un léger épaississement collenchymateux (fig. 15 v_1). Tandis que l'épiderme ne subit que des divisions radiales, dans les couches cellulaires du tissu fondamental il s'opère de nombreuses divisions tangentielles (fig. 15 *d* et 16 *d*) et peu de divisions radiales. Jusqu'à l'épanouissement des bourgeons, l'épaississement collenchymateux reste peu marqué. Chez de jeunes feuilles, où entre l'épiderme et les faisceaux vasculaires il existe déjà presque autant de couches cellulaires que dans l'état adulte, mais qui sont encore renfermées entre les écailles du bourgeon, ce ne sont ordinairement que les 3 ou 4 couches cellulaires externes qui possèdent déjà des parois légèrement épaissies (fig. 16). Vers l'intérieur, l'épaississement diminue, tandis que les cellules croissent en grandeur et que les interstices deviennent plus nombreux. Mais lorsque les jeunes feuilles commencent à sortir du bourgeon, l'accroissement en épaisseur des parois cellulaires prend le dessus et la division des cellules s'arrête. Dans les feuilles adultes, les interstices entre les faisceaux vasculaires et l'épiderme ont une forme arrondie (fig. 17 *a*) et sont plus clair-semés que dans les feuilles jeunes, ce qui prouve qu'une partie d'entre eux a disparu par suite des progrès de l'épaississement.

De même qu'à la face inférieure des feuilles, il y avait aussi déjà à leur face supérieure, dans le premier état examiné, un peu d'épaississement des parois au niveau de l'épiderme. Celui-ci éprouve exclusivement des divisions radiales, tandis que les

cellules situées entre lui et les faisceaux vasculaires se divisent le plus souvent dans le sens tangentiel, rarement dans le sens radial. C'est surtout la première couche cellulaire sous-épidermique, de laquelle dérive la zone collenchymateuse presque tout entière, qui subit des divisions répétées dans la direction tangentielle; pendant que les cellules-filles ainsi engendrées continuent à se segmenter, les parois des cellules plus profondes deviennent à leur tour un peu plus épaisses. Longtemps l'épaississement collenchymateux reste de médiocre importance; ce n'est qu'au moment de l'épanouissement des bourgeons qu'il s'accentue vigoureusement. Là où, dans l'état adulte, le collenchyme est séparé par une démarcation tranchée du parenchyme à contenu chlorophyllien, il est facile de constater qu'une seule cellule-mère engendre parfois une cellule collenchymateuse et une cellule parenchymateuse à parois minces et riche en chlorophylle.

7. *Nerium Oleander* L.

(feuille).

Dans la feuille du laurier-rose, le collenchyme forme, au-dessus et au-dessous de la nervure primaire, une zone sous-épidermique. Au côté interne il passe insensiblement au parenchyme (fig. 21). Ses cellules (fig. 22) sont allongées, rétrécies en pointe aux extrémités, partagées en travers par de minces cloisons horizontales finement ponctuées, et pourvues sur les parois longitudinales de ponctuations plus ou moins ovales, placées transversalement. Sur la coupe transversale (fig. 21), les cellules présentent de petites cavités rondes et des parois épaissies sur toute leur étendue. La partie de ce tissu qui forme le passage au parenchyme est caractérisée, indépendamment de la diminution d'épaisseur des parois, par l'agrandissement des cavités cellulaires et par l'apparition d'interstices (fig. 21 *i*). Ceux-ci sont de dimensions différentes; les petits, dont la forme est souvent plus ou moins arrondie, sont généralement situés

le plus en dehors. Tant à la face supérieure qu'à la face inférieure de la feuille, le collenchyme se continue dans le limbe. Immédiatement sous l'épiderme, on trouve en effet une couple de couches dont les cellules présentent un léger degré d'épaississement collenchymateux, possèdent des membranes ponctuées et ne contiennent pas de chlorophylle. Ces couches manquent toutefois sous l'épiderme des sillons. Ceux-ci sont exclusivement propres à la face inférieure de la feuille, où ils se trouvent entre les faisceaux vasculaires anastomosés, surtout entre les grands. Ils sont pourvus d'un épiderme très velu et cachent les stomates. Vis-à-vis des grands faisceaux vasculaires, le collenchyme compte plus de deux assises de cellules dans son épaisseur, aussi bien à la face supérieure qu'à la face inférieure. Aux bords de la feuille il acquiert encore plus de développement, et il y est composé de fibres cloisonnées présentant beaucoup de points de ressemblance avec celles qui ont été décrites ci-dessus.

Lorsque les faisceaux vasculaires existent déjà en ébauche, mais ne laissent pas encore apercevoir de vaisseaux, le tissu fondamental, au-dessus et au-dessous de la nervure primaire, consiste en petites cellules à parois minces, entre lesquelles il n'y a pas encore de différences de forme ou de grandeur. Des espaces intercellulaires ne s'observent qu'à la face inférieure, où ils se trouvent entre les deuxième et troisième couches cellulaires et entre les cellules situées plus profondément. Le limbe n'est encore représenté que par une bande très étroite, de chaque côté de la nervure primaire. Contrairement à l'épiderme, qui s'accroît exclusivement par des divisions radiales, le tissu fondamental situé sous le nervure primaire éprouve de nombreuses divisions tangentielles (fig. 19 d_1), et çà et là seulement quelques divisions radiales (fig. 19 *d*) et obliques. Les cellules plus profondes surpassent bientôt en grandeur les cellules externes, et en même temps elles prennent une forme arrondie. C'est ce qu'on peut voir déjà chez de petites feuilles longues de 3 mm. Les couches cellulaires extérieures, où les divisions sont le plus fréquentes, restent exemptes d'interstices et commencent bientôt

à épaissir un peu leurs parois. Lorsque les feuilles ont atteint une longueur de 1,5 cm., l'épaississement est encore très faible; il n'acquiert quelque importance que chez les feuilles longues de 3,5 à 4 cm. (fig. 20). Les couches extérieures ne sont jamais séparées des intérieures par une ligne de démarcation tranchée; entre les unes et les autres il y a toujours un passage graduel, reconnaissable à l'accroissement de grandeur des cellules et à l'apparition d'interstices (fig. 20 *i*). Dès que l'épaississement devient bien prononcé, la division des cellules s'arrête; dans les feuilles qui ont atteint la dimension citée en dernier lieu, on n'observe déjà plus de divisions à la face inférieure. A part l'augmentation progressive de l'épaisseur des parois cellulaires, la marche ultérieure du développement n'offre rien de très intéressant.

A la face supérieure de la feuille, il se produit beaucoup de divisions tangentielles, mêlées de quelques divisions radiales. Des espaces intercellulaires ne tardent pas à apparaître entre les cellules situées vers l'intérieur; dans les petites feuilles longues de 5 mm., ils sont déjà très nombreux. Les cellules externes, dans lesquelles la division est le plus active, commencent bientôt à épaissir légèrement leurs parois. L'épaississement s'y fait toujours à peu près dans la même mesure qu'à la face inférieure de la feuille, et il s'accuse aussi avec le plus de force quand les divisions cellulaires sont terminées en majeure partie.

Le développement du limbe [1]) marche lentement, mais régulièrement. La formation des sillons à la face inférieure commence de très bonne heure; le premier indice qui la révèle est le soulèvement de l'épiderme vis-à-vis des faisceaux vasculaires, soulèvement qui est déjà plus ou moins apparent chez des feuilles longues de 5 ou 6 mm. Sauf en face des faisceaux vasculaires, il paraît s'opérer rarement des divisions tangentielles dans le limbe. Celles que j'ai observées dans la seconde couche sous-épidermique se trouvaient à la place qui vient d'être indiquée.

---

[1]) Voir Pfitzer, Pringsh. *Jahrb.*, VIII, p. 49 et suiv.

Chez les feuilles longues de 1,5 cm., les deux couches hypodermiques, à la face supérieure, sont différenciées par un commencement d'épaississement des parois, par l'absence d'espaces intercellulaires et un peu aussi par la moindre abondance de la chlorophylle. A la face inférieure, ces caractères ne se manifestent que chez des feuilles un peu plus âgées.

8. *Veronica speciosa Hendersoni* Hort.
(feuille).

Sous la nervure médiane se trouve une forte bande de collenchyme; elle s'étend de l'épiderme, qui ici présente également un épaississement collenchymateux, jusque près des faisceaux vasculaires (fig. 25). Ses cellules diffèrent peu en diamètre dans les trois sens de l'étendue (fig. 26). Leurs parois, tant longitudinales que transverses, sont épaissies et munies de ponctuations, qui chez les premières possèdent une forme ovale et sont placées en travers (fig. 26 *s*). Les cellules situées immédiatement sous l'épiderme sont plus petites que celles qui se trouvent à quelque distance de cette couche; entre les premières on voit rarement des espaces intercellulaires; entre les secondes ils sont au contraire abondants et atteignent fréquemment des dimensions considérables (fig. 25 *i*); parfois ils sont plus ou moins arrondis. Quand on s'éloigne encore davantage de la surface, les cellules deviennent plus petites, l'épaississement diminue peu à peu et on ne rencontre plus que de nombreux petits interstices, pas de grands. C'est ainsi que le collenchyme passe au parenchyme. A la face supérieure du limbe, on trouve immédiatement sous l'épiderme une couche de cellules à faible épaississement collenchymateux, qui atteignent une taille moyenne, possèdent des membranes ponctuées et ne renferment que peu de chlorophylle. Près des bords, le collenchyme est épais de plusieurs assises de cellules et ses parois sont plus fortement épaissies. Cela est aussi le cas au-dessus de la nervure médiane,

où il est en rapport avec un autre tissu collenchymateux, entouré par les faisceaux vasculaires, qui forment un cercle presque fermé.

Dans de jeunes feuilles longues de 1,5 mm., il y avait à la face inférieure, entre l'épiderme et les futurs faisceaux vasculaires, dans lesquels les premiers vaisseaux commençaient à se former, environ 6 rangées (fig. 23) de petites cellules arrondies et à parois minces, de grandeur sensiblement égale. Entre les cellules on voyait partout des espaces intercellulaires (fig. 23 *i*), qui ne faisaient pas défaut non plus entre l'épiderme et la première couche cellulaire sous-épidermique. Ces espaces atteignent souvent des dimensions notables dans les couches externes, mais sont au contraire petits dans les couches les plus rapprochées des faisceaux vasculaires (fig. 23 *v*). Tandis que l'épiderme augmente le nombre de ses cellules exclusivement par voie de division radiale (fig. 23 d_1), dans le tissu sous-jacent il s'opère à l'origine des divisions radiales (fig. 23 *d*) et plus tard aussi des divisions tangentielles (fig. 24 *d*), surtout dans les deux couches cellulaires externes. L'épaississement collenchymateux débute entre l'épiderme et la première couche cellulaire sous-épidermique, lorsque la feuille est devenue longue d'environ 4 mm. Quand elle a atteint une longueur de 1,5 cm., l'épaississement n'a encore fait que des progrès insignifiants. La plupart des divisions cellulaires ont alors eu lieu, de sorte qu'il y a déjà entre les faisceaux vasculaires et l'épiderme environ 10 rangées de cellules, presque autant qu'à l'état adulte. Chez les feuilles longues de 3 cm. (fig. 24), l'épaississement collenchymateux s'est notablement étendu dans le sens de la largeur et de l'épaisseur. Il est le plus prononcé entre l'épiderme et la première couche cellulaire sous-épidermique; en ce point il n'existe plus d'espaces intercellulaires. Entre les autres couches cellulaires collenchymateuses, dont les parois ne sont encore que peu épaissies, les interstices sont au contraire nombreux encore (fig. 24 *i*) et présentent souvent de grandes dimensions. Le parenchyme, auquel le collenchyme passe par degrés, est

pourvu de petits espaces intercellulaires. Dans la première couche cellulaire sous-épidermique, nous voyons encore plusieurs cloisons tangentielles nouvellement formées (fig. 24 *d*), qui ne tardent pas à s'épaissir à leur tour. Très rarement on observe encore une division dans des couches plus éloignées de la surface. A partir du moment où les feuilles sont parvenues à la longueur indiquée en dernier lieu, les parois des cellules augmentent rapidement d'épaisseur, de sorte que déjà chez les feuilles mesurant 5 cm. de long, la plupart des interstices, dans les trois couches cellulaires externes, ont disparu ou ont pris une forme arrondie.

Chez les feuilles qui ont atteint une longueur de 1,5 mm., le limbe n'est encore représenté que par une bande très étroite aux deux côtés de la nervure primaire. Dans la première couche sous-épidermique, à la face supérieure, les celllules sont le siège de divisions, qui au-dessus de la nervure primaire s'opèrent suivant la direction tangentielle et, dans l'expansion foliacée, suivant une direction perpendiculaire à l'épiderme. Ces divisions se continuent longtemps, de sorte que les unes et les autres se rencontrent encore fréquemment dans des feuilles longues de 1,5 cm. Chez celles-ci, en outre, on voit souvent aussi des divisions parallèles à l'épiderme dans la première couche cellulaire à la face supérieure de l'expansion foliacée. Quant à l'épiderme, il subit exclusivement des divisions perpendiculaires à son plan. L'épaississement collenchymateux se manifeste d'abord, lorsque la feuille a atteint une longueur de 3 mm., au-dessus de la nervure primaire, entre l'épiderme et la couche de cellules immédiatement sous-jacente; de là il s'étend ensuite le long de l'épiderme de l'expansion foliacée, où il n'acquiert quelque importance que chez des feuilles de 3 cm. de longueur. Quand les feuilles sont parvenues à la longueur de 5 cm., les cellules de la première couche sous-épidermique du limbe commencent à épaissir aussi un peu leurs autres parois, et ordinairement elles présentent en outre dans leur forme et leur contenu quelque différence avec les cellules sous-jacentes. Ces dernières,

en effet, sont plus richement pourvues de chlorophylle et se sont un peu allongées perpendiculairement à l'épiderme. Au-dessus de la nervure primaire, l'épaississement collenchymateux, dans les feuilles longues de 3 cm., commence à s'étendre sur les parois de cellules plus profondes. Le tissu qui est entouré par les faisceaux vasculaires ne montre des traces nettes d'épaississement que lorsque les feuilles mesurent déjà 5 cm. de longueur.

9. *Le développement considéré en rapport avec la fonction mécanique.*

En étudiant le développement du collenchyme, j'ai reconnu qu'il existe un rapport intime entre ce développement et la fonction mécanique que le collenchyme remplit dans les organes de la plante, tant adultes que jeunes. Dans la tige de l'*Aucuba japonica* L. et de l'*Evonymus latifolius* Mill. et Scop., ainsi que dans le pédoncule et la feuille de cette dernière plante, les parois des cellules commencent à s'épaissir fortement lors de l'épanouissement du bourgeon, c'est-à-dire au moment où les jeunes organes vont être privés du soutien et de la protection des écailles qui les enveloppaient. Chez le *Nerium Oleander* L. et le *Veronica speciosa Hendersoni* Hort., l'épaississement s'accuse dans les jeunes feuilles à l'époque où elles perdent l'appui des feuilles plus âgées. Chez le *Lamium purpureum* L. et le *Lamium album* L., au contraire, dont les entre-nœuds cessent déjà à un état très jeune d'être soutenus par des organes plus âgés, les faisceaux collenchymateux commencent à se former de très bonne heure; leur force augmente à mesure que les entre-nœuds deviennent plus longs et plus gros, c'est-à-dire, à mesure que ceux-ci ont besoin d'un soutien plus solide.

10. *Résumé.*

Chez toutes les plantes et dans tous les organes que j'ai

examinés, les faisceaux vasculaires existaient déjà à l'état procambial avant que le collenchyme commençât à se former. Aucune de ces plantes ne m'a offert un exemple de l'origine commune (*einheitliche Anlage*) du collenchyme et du mestome, dont M. Haberlandt [1]) parle chez *Atherurus ternatus* et *Lamium purpureum* [2]). Le nombre des couches cellulaires qui, dans les états les plus jeunes dont j'aie fait l'étude, se trouvaient entre l'épiderme et les faisceaux vasculaires, s'élevait pour la tige de *Lamium purpureum* L. à deux, pour les tiges de *Lamium album* L., *Aucuba japonica* L. et *Evonymus latifolius* Mill. et Scop., ainsi que pour le pédoncule de cette dernière plante, à environ quatre, pour la feuille d'*Evonymus latifolius* Mill. et Scop., vers le milieu de la face inférieure, à trois, pour celle de *Veronica speciosa Hendersoni* Hort., en ce même point, à environ six, et encore plus haut pour celle de *Nerium Oleander* L. Dans les états les plus jeunes observés par M. Sanio, le nombre en question était pour la tige d'*Evonymus latifolius* [3]) également de quatre, et de trois pour celle de *Peperomia blanda* [4]).

Le plus souvent, dans le tissu compris entre l'épiderme et les faisceaux vasculaires, c'est d'abord la division des cellules, puis l'épaississement collenchymateux, qui joue le rôle prépondérant; tel est le cas, par exemple, pour la tige, le pédoncule et la feuille d'*Evonymus latifolius* Mill. et Scop, pour la tige d'*Aucuba japonica* L., pour les feuilles de *Nerium Oleander* L. et de *Veronica speciosa Hendersoni* Hort.; tel est le cas aussi, quoique à un moindre degré, chez *Lamium album* L.; chez *Lamium purpureum* L., au contraire, les deux processus sont

---

[1]) *Entwickelungsgesch. d. mech. Gewebesystems d. Pflanzen*, p. 58 et 59.

[2]) Sous le rapport du développement, M. Ambronn (Pringsh. *Jahrb.* XII) distingue deux cas, celui d'une origine commune pour le collenchyme et le mestome, et celui d'une origine indépendante pour chacun de ces tissus. Suivant cette division, les tiges et feuilles étudiées par moi appartiendraient donc à la seconde catégorie.

[3]) *Bot. Zeit.*, 1863, p. 363.

[4]) *Bot. Zeit.*, 1864, p. 209.

plus simultanés. Le moment où l'épaississement commence à se prononcer fortement est en rapport avec la fonction mécanique que le collenchyme a à remplir dans les jeunes organes des plantes.

Dans l'état de jeunesse, le collenchyme passe toujours insensiblement au parenchyme, non seulement dans les cas où ce passage graduel existe encore à l'état adulte, mais aussi lorsque, dans ce dernier état, il y a une démarcation nette entre les deux tissus, comme, par exemple, chez *Lamium purpureum* L. et *Lamium album* L. M. Schleiden [1]) était arrivé au même résultat pour la tige des Cactées.

Il n'est pas rare que l'épaississement des parois cellulaires s'accompagne de l'arrondissement et de la disparition des interstices. C'est ce qu'on voit très distinctement chez *Lamium purpureum* L.; on l'observe également chez *Lamium album* L. et, à la face inférieure des feuilles, chez *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. et chez *Veronica speciosa Hendersoni* Hort.

Les fibres collenchymateuses cloisonnées et terminées en pointe des tiges de *Lamium purpureum* L. et d'*Aucuba japonica* L. proviennent de cellules parenchymateuses. Les extrémités en pointe ne sont donc pas telles dès l'origine, mais se forment au cours du développement. M. Haberlandt [2]), au contraire, a trouvé que chez *Lamium purpureum*, *Atherurus ternatus*, *Cucurbita Pepo* et *Tradescantia erecta* les fibres naissent d'un tissu générateur prosenchymateux, formé par la division longitudinale réitérée de cellules mères mérismatiques. Chez *Chenopodium album*, toutefois, M. Haberlandt a vu le collenchyme dériver du parenchyme. [3])

---

[1]) *l. c.*, p. 15.

[2]) *l. c.*, p. 58 et suiv.

[3]) Suivant M. Ambronn (*l. c.*, p. 536), les éléments du tissu générateur, d'où procède plus tard le collenchyme, sont en partie de nature cambiale et en partie de nature mérismatique. Néanmoins, d'après lui, il arrive fréquemment aussi que les cellules parenchymateuses de l'écorce s'épaississent en collenchyme et qu'il n'existe pas de tissu générateur proprement dit.

Chez aucune des plantes que j'ai étudiées, pas même là où le collenchyme à l'état adulte est nettement délimité, je n'ai pu saisir, en ce qui concerne le développement génétique, un rapport plus intime entre les cellules du collenchyme qu'entre celles-ci et les cellules parenchymateuses adjacentes. M. Sanio [1]), au contraire, admet que dans la tige d'*Evonymus latifolius* et de *Peperomia blanda* le collenchyme dérive d'une seule couche cellulaire sous-épidermique; telle est aussi la conclusion de M. Haberlandt [2]) pour la tige du *Tradescantia erecta*.

Le résultat de toutes mes observations, mis en rapport avec la division en systèmes de M. Sachs, est que le collenchyme naît du tissu fondamental; c'est ce qui a été trouvé aussi par M. Pfitzer chez *Nerium Oleander* [3]), *Ilex Aquifolium* [4]) et *Begonia manicata* [5]), et par M. Vöchting [6]) chez *Rhipsalis Cassytha*.

EXPLICATION DES FIGURES.

(Pl. I et II).

Toutes les figures sont au grossissement de 250/1, sauf les fig. 1 et 2, dont le grossissement est de 500/1.

Fig. 1. *Lamium purpureum* L. Entre-nœud non adulte, en travers; *c* épaississement collenchymateux, *d* divisions cellulaires, *i* espace intercellulaire, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 2. *Lamium purpureum* L. Entre-nœud non adulte, en long; *i* espace intercellulaire.

Fig. 3. *Lamium purpureum* L. Entre-nœud non adulte, en travers; *l* épaississement en forme de côte parallèle à l'épiderme, *p* épaississement polyédrique, *a* espace intercellulaire

---

[1]) *l. c.*
[2]) *l. c.*, p. 60.
[3]) *l. c.*, p. 49 et 50.
[4]) *l. c.*, p. 51.
[5]) *l. c.*, p. 33.
[6]) Pringsh. *Jahrb.*, IX, p. 371.

arrondi, *i* petit espace intercellulaire non arrondi, i_1 grand espace intercellulaire parallèle à l'épiderme, i_{II} grand espace intercellulaire passant à un épaississement parallèle à l'épiderme, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 4. *Lamium purpureum* L. Entre-nœud adulte, en travers; *l* épaississement en côte parallèle à l'épiderme, *p* épaississement polyédrique, *a* espace intercellulaire arrondi, *i* petit espace intercellulaire, i_1 grand espace intercellulaire passant à un épaississement parallèle à l'épiderme, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 5. *Lamium purpureum* L. Entre-nœud adulte, en long; *d* cloison transverse mince, *u* extrémité rétrécie en pointe, *s* ponctuation.

Fig. 6. *Aucuba japonica* L. Tige, état le plus jeune que j'aie examiné, en travers; *i* espace intercellulaire, *d* division cellulaire radiale, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 7. *Aucuba japonica* L. Entre-nœud non adulte, en travers; *i* espace intercellulaire, *d* division cellulaire radiale, d_1 division cellulaire tangentielle, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 8. *Aucuba japonica* L. Entre-nœud non adulte, coupe longitudinale radiale; *i* espace intercellulaire, *d* division transversale, d_1 paroi transverse un peu oblique.

Fig. 9. *Aucuba japonica* L. Entre-nœud adulte, en travers; *i* espace intercellulaire, *a* espace intercellulaire un peu arrondi, *s* ponctuation sur une paroi longitudinale, s_1 ponctuation sur une paroi transverse, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 10. *Aucuba japonica* L. Entre-nœud adulte, coupe longitudinale radiale; *u* extrémité rétrécie en pointe, *d* paroi transverse, *s* ponctuation sur une paroi longitudinale, s_1 ponctuation sur une paroi transverse.

Fig. 11. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Tige, état le plus jeune examiné, en travers; v_1 épaississement entre l'épiderme et la première couche cellulaire sous-épidermique, *i* espace intercellulaire, *d* division radiale dans la première couche cellulaire sous-épidermique, d_1 division tangentielle dans la première

couche cellulaire sous-épidermique, *d*,, division radiale dans l'épiderme, *v* faisceau procambial.

Fig. 12. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Entre-nœud non adulte, en travers; v_1 épaississement, *i* espace intercellulaire, *d* division cellulaire, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 13. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Entre-nœud adulte, en travers; *i* espace intercellulaire, *s* ponctuations.

Fig. 14. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Entre-nœud adulte, coupe longitudinale radiale; *i* espace intercellulaire, *s* ponctuations.

Fig. 15. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Feuille non adulte, coupe transversale au milieu de la face inférieure; v_1 épaississement, *i* espace intercellulaire, *d* division cellulaire tangentielle, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 16. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Feuille non adulte, coupe transversale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire, *d* division cellulaire tangentielle, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 17. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Feuille adulte, coupe transversale au milieu de la face inférieure; *a* espace intercellulaire arrondi, *v* faisceau vasculaire, *b* fibres libériennes.

Fig. 18. *Evonymus latifolius* Mill. et Scop. Feuille adulte, coupe longitudinale radiale au milieu de la face inférieure; *s* ponctuation placée en travers.

Fig. 19. *Nerium Oleander* L. Feuille non adulte, longue de 5 mm., coupe transversale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire, *d* division cellulaire radiale, d_1 division cellulaire tangentielle.

Fig. 20. *Nerium Oleander* L. Feuille non adulte, longue de 3,5 à 4 cm., coupe transversale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire dans la partie qui forme le passage, i_1 espace intercellulaire dans le parenchyme.

Fig. 21. *Nerium Oleander* L. Feuille adulte, coupe transversale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire.

Fig. 22. *Nerium Oleander* L. Feuille adulte, coupe longitudinale radiale au milieu de la face inférieure; *u* extrémité rétrécie en pointe, *d* paroi transverse horizontale, *s* ponctuation.

Fig. 23. *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. Feuille non adulte, longue de 1,5 mm., coupe transversale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire, *d* division cellulaire radiale, d_1 division cellulaire radiale dans l'épiderme, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 24. *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. Feuille non adulte, longue de 3 cm., coupe transversale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 25. *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. Feuille adulte, coupe transversale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire, *v* faisceau vasculaire.

Fig. 26. *Veronica speciosa Hendersoni* Hort. Feuille adulte, coupe longitudinale radiale au milieu de la face inférieure; *i* espace intercellulaire, *s* ponctuation placée en travers.

SUR LA

FONCTION DES MATIÈRES RÉSINEUSES DANS LES PLANTES,

PAR

HUGO DE VRIES.

Dès les premiers temps de la physiologie végétale, on savait qu'un grand nombre de plantes produisent des liquides de nature spéciale, qui sont contenus dans des réservoirs particuliers, et qui ne quittent pas le corps de la plante, à moins qu'une lésion ne vienne ouvrir les cavités qui les renferment. Malpighi avait donné à ces liquides le nom de „sucs propres", et aux organes qui les contiennent celui de „vaisseaux propres", noms que malheureusement on a aussi appliqués plus tard à des liquides et à des organes entièrement différents, de sorte qu'aujourd'hui ils sont tombés en désuétude presque complète. Grew distingua les vaisseaux propres en vaisseaux lactifères, gommifères, résinifères et mucilaginifères. Les contenus de tous ces organes, — suc laiteux, gomme, résine et mucilage, — se ressemblent en ceci, qu'ils découlent de blessures récentes à l'état liquide ou semi-liquide, puis se transforment peu à peu, à la surface de la partie blessée, en masses plus solides, ordinairement très tenaces. Par la plupart de leurs autres propriétés,

relatives tant à la composition chimique qu'au mode de production, ils s'éloignent beaucoup les uns des autres. En ce qui concerne la signification anatomique de ces organes, jadis appelés vaisseaux, on a également reconnu qu'elle est loin d'être la même pour les diverses espèces ci-dessus nommées, ni même pour des organes que Grew comprenait sous une dénomination unique; aussi, dans les derniers temps, a-t-on entièrement renoncé, du point de vue anatomique, à la réunion des sucs propres en un seul et même groupe.

Ce qui vient d'être dit n'empêche pas, naturellement, que le rôle physiologique de ces sucs ne puisse être le même; mais, justement à l'égard de ce rôle, la plus grande incertitude règne dans les écrits des botanistes. Au sujet de quelques-unes de ces matières, et notamment au sujet du suc laiteux, les théories les plus singulières ont successivement été émises, puis, après avoir suscité des discussions ardentes et plus ou moins prolongées, sont retombées dans un profond oubli. Une littérature étendue et riche en faits s'est ainsi formée, mais toutes ces études ont si peu conduit à une vue claire de la signification physiologique des sucs propres, que M. Sachs, dans la dernière édition de son Traité de botanique, a encore pu dire que le caoutchouc dans les vaisseaux laticifères, les résines et les substances qui les engendrent dans les canaux résinifères, enfin la gomme et les matières analogues dans les canaux gommifères sont au nombre des substances dont le rôle, dans l'économie de la plante, est jusqu'ici entièrement inconnu [1]).

Cette remarque de M. Sachs montre combien la question réclame encore de recherches. Ajoutons que, depuis l'apparition du Traité de M. Sachs, différents auteurs ont tracé la voie conduisant à une notion déterminée des fonctions de la résine des Conifères, tandis que, d'un autre côté, on a publié des expériences qui dévoilent clairement une grande affinité physiologique entres les diverses matières ci-dessus nommées. Je crois donc

---

[1]) Sachs, *Lehrbuch der Botanik*, 4e éd., p. 676.

qu'il ne sera pas sans intérêt de rassembler et de coordonner les faits et les opinions qui abondent à ce sujet dans la littérature botanique, mais qui s'y trouvent tellement dispersés que l'étude en devient très pénible; réunis, ils nous sera plus facile d'examiner quel résultat positif s'en laisse déduire et quelles indications on peut y puiser pour des recherches ultérieures.

Les faits qui contribuent à jeter du jour sur la question dont nous traitons, se laissent répartir, sans effort, en trois grandes catégories, suivant qu'ils ont rapport au développement historique de nos connaissances sur la matière, ou qu'ils appartiennent au domaine de l'anatomie comparée, ou qu'ils sont de nature physiologique. Dans le présent travail je m'occuperai exclusivement de ce dernier groupe de faits, en renvoyant pour les deux autres, ainsi que pour quelques arguments physiologiques non cités ici, à un Mémoire que j'ai publié récemment, sous le titre de *Ueber einige Nebenprodukte des pflanzlichen Stoffwechsels*, dans les *Landwirthschaftliche Jahrbücher*, Bd. X, 1881. Il y a d'autant moins d'inconvénients à renfermer la discussion dans ces bornes, que les trois catégories d'arguments conduisent à des conclusions parfaitement identiques.

Ainsi qu'il ressort de ce qui précède, le groupe des sucs propres, établi par Malpighi, comprend les substances connues aujourd'hui sous les noms de térébenthine, résine, gommes-résines, baumes, mucilage, gomme et suc laiteux. Parmi elles, la térébenthine et la résine doivent être placées au premier rang, tant parce qu'elles sont très généralement répandues dans le règne végétal, que parce qu'on a pu en acquérir une connaissance très exacte chez les plantes qui sont cultivées en grand pour la production de ces deux matières. Les plantes que j'ai ici en vue sont surtout les Conifères, et je me propose de faire d'abord une étude détaillée de la fonction des matières résineuses de ces arbres, avant d'examiner le rôle des autres substances. Cette marche me paraît être la mieux appropriée

au but, car les faits que j'ai colligés dans les ouvrages spéciaux sur ces deux matières mènent comme d'eux-mêmes à une connaissance exacte de leur fonction, connaissance qui peut ensuite servir de guide pour étendre la même étude au règne végétal entier et aux autres produits en apparence si divers. Je commence donc par:

La fonction des matières résineuses chez les Conifères.

Autrefois, on admettait généralement que les matières résineuses des Conifères doivent être regardées comme des produits accessoires et inutiles des phénomènes de nutrition, comme des matières qui, ayant pris naissance dans différentes transformations chimiques au sein des cellules et n'étant plus susceptibles d'aucun emploi, étaient emmagasinées à des places déterminées dans le corps de la plante, afin de nuire aussi peu que possible à l'assimilation ultérieure. Des recherches plus récentes ont montré, toutefois, que cette hypothèse n'est plus acceptable aujourd'hui, puisque, bien au contraire, de très grandes quantités d'éléments nutritifs sont annuellement consommées pour la formation de la résine. C'est ce qui ressort déjà de la composition chimique des matières résineuses. L'essence de térébenthine, la première et la plus importante de ces combinaisons, celle dont paraissent dériver toutes les autres, suivant les circonstances, est en effet le corps le plus riche en carbone qui existe dans l'arbre, et sa production exige par conséquent une quantité relativement beaucoup plus grande des matières assimilées ordinaires (surtout de glucose), d'autant plus qu'elle ne se forme probablement aux dépens de celles-ci que par une longue série de transformations chimiques [1]). En d'autres termes, pour un poids déterminé de résine [2]), des poids beaucoup plus considérables d'aliments organiques doivent être consommés.

---

[1]) Frank, *Die Krankheiten der Pflanzen*, I, 1881, p. 82.

[2]) Consultez sur la signification du mot „résine" et sur les mélanges souvent très complexes qui sont habituellement désignés sous ce nom: Wiesner, *Die technisch verwendeten Gummi-arten, Harze und Balsame*, et Wiesner, *Die Rohstoffe des Pflanzenreichs.*

On est conduit à ce même résultat par l'expérience acquise dans la pratique. Si la résine ne constituait dans les canaux résinifères qu'un produit excrété inutile, il serait évidemment indifférent pour la plante, sinon avantageux, que cette matière s'écoulât de ses réservoirs à la suite de blessures; en aucun cas, la plante ne pourrait en souffrir. Or, la considération même superficielle des notions empiriques fournies par l'exploitation en grand des arbres résineux montre qu'il est loin d'en être ainsi. L'extraction de la résine affaiblit les arbres à un haut degré, et il n'est pas rare que l'accroissement du bois s'en trouve diminué d'un tiers. C'est aussi un fait connu qu'on ne doit commencer à soumettre au gemmage que les arbres âgés de 20—25 ans, attendu que les sujets plus jeunes ne sont pas encore en état de supporter la perte. Il y a deux méthodes d'exploitation. Dans le „gemmage à mort" on s'efforce de soutirer à l'arbre la plus grande quantité possible de résine, mais la conséquence est que l'arbre meurt au bout de 3 ou 4 ans. Aussi cette méthode n'est-elle appliquée qu'à des arbres qui, pour l'une ou l'autre raison, n'en devraient pas moins être abattus à terme assez court. Dans la méthode ordinaire, ou „gemmage à vie", la saignée est au contraire modérée avec soin, pour que le préjudice ne devienne pas trop notable, et on sait qu'avec un pareil traitement la récolte de la résine peut être continuée avantageusement, sur le même arbre, pendant 60—80 ans. Beaucoup d'autres faits d'expérience conduisent à la même conclusion, de sorte qu'il n'y a aucun doute qu'une forte perte de résine ne soit nuisible aux arbres, tandis que, en cas de déperdition moindre, la matière exsudée est peu à peu remplacée par d'autre, nouvellement formée. On voit donc que, dans les opérations susdites, ce ne sont pas des matières inutiles ou nuisibles qui sont soustraites à la plante, mais des combinaisons très importantes, dont la production nouvelle, ainsi provoquée. s'accompagne toujours d'une perte considérable en éléments nutritifs assimilés.

Les procédés employés pour la récolte de la résine nous ap-

prennent aussi que la production de cette substance chez les Conifères ne doit pas être regardée comme une maladie, analogue, par exemple, à la maladie gommeuse du cerisier et de quelques autres arbres fruitiers. Dans ces cas, en effet, la formation de la gomme, à la suite d'une lésion locale, s'étend de plus en plus loin et par là devient souvent dangereuse pour la vie de la plante; chez les Conifères, il faut tout à l'inverse, pour entretenir l'écoulement de la résine, rafraîchir tous les deux ou trois jours l'incision. Néglige-t-on ce soin, la plaie se ferme et l'exsudation résineuse s'arrête. Il est d'ailleurs généralement connu que la maladie gommeuse dépend d'un phénomène de désorganisation des tissus les plus divers, tandis que la formation de la résine, chez les Conifères, a lieu dans des organes spéciaux, destinés à cet usage.

De ce qui vient d'être dit, il appert que la production des matières résineuses est une fonction normale et importante dans la vie des Conifères, et qui doit par conséquent avoir pour ces arbres un résultat déterminé. Mais de quelle nature est ce résultat? A cet égard, les recherches anatomiques fournissent une indication précieuse, car elles nous apprennent que la résine, partout où elle occupe des réservoirs entièrement clos, n'est pas consommée, mais reste en place, sans éprouver de changement, jusqu'à la mort des organes [1]). Elle ne prend donc aucune part à la transsubstantiation formative, ou, en général, aux processus normaux de la vie.

Par contre, on sait que les blessures des Conifères laissent écouler la résine sous la forme d'une masse visqueuse épaisse, qui à l'air durcit peu à peu. Dans tout bois de pins on peut observer ce phénomène et souvent trouver la résine accumulée en quantités très considérables à la surface des parties blessées. Parfois de grandes plaies, produites par l'arrachement de l'écorce, sont couvertes d'une couche continue, et même çà et là assez épaisse, de résine. Un pareil recouvrement ne s'opère, à raison

---

[1]) De Bary, *Vergleichende Anatomie*, p. 142.

de la nature de la masse exsudée, qu'avec beaucoup de lenteur, mais cela n'empêche pas qu'il ne puisse atteindre un haut degré de perfection. Dans une jeune pinède des environs de la Haye, on a percé il y a quelque temps un nouveau sentier, ce qui a exigé la suppression d'un grand nombre de branches, tant grosses que minces. Quelques mois après, j'ai vu toutes les plaies, même les plus grandes, complètement recouvertes d'un enduit résineux.

Mais non seulement la résine, en pareil cas, s'étend à la surface des plaies, elle pénètre aussi à l'intérieur du bois dénudé, y remplit les cavités des cellules et imbibe leurs parois. Cette imbibition est si parfaite, que grâce à elle le bois se trouve ordinairement protégé d'une manière très efficace contre les influences pernicieuses de l'atmosphère et spécialement contre la pourriture. Quiconque a comparé les suites de très grandes blessures chez les pins et chez nos arbres feuillés ordinaires, doit avoir été frappé du fait que ces blessures, telles par exemple qu'en produit la rupture de grosses branches près de leur origine, deviennent si fréquemment chez les arbres feuillés la source d'une pourriture lente ou consomption de tout l'intérieur du tronc, tandis que chez les pins cela n'est que très rarement le cas [1]). La cause de cette différence, qui joue un rôle si important dans la sylviculture, est bien connue de tous les arboriculteurs; c'est la résine qui, chez les Conifères, forme un si excellent moyen de conservation du bois. M. Frank, dont le récent Traité (*l. c.*, p. 159) décrit en détail la production de la résine chez les Conifères, signale à différentes reprises les avantages qui résultent pour ces arbres du recouvrement de leurs plaies par la résine, et il compare ce recouvrement au goudronnage pratiqué sur les plaies des arbres feuillés, opération dont une expérience séculaire a montré la complète inutilité pour les pins. Aussi appelle-t-il la résine un vulnéraire naturel, d'une efficacité souveraine.

---

[1]) Voir aussi: R. Hartig, *Die Zersetzungserscheinungen des Holzes*, 1878 p. 84.

M. Hartig n'est pas moins explicite à l'égard des bienfaits de la résine. Après avoir décrit minutieusement la part que différents Champignons prennent à l'altération du bois mis à découvert par des blessures, et en particulier les maladies occasionnées dans le bois de certains Conifères par le mycélium d'Hyménomycètes parasites, il mentionne comment, à la limite du bois mourant et du bois sain, peuvent se produire des extravasations de résine, substance qui imprègne alors si complètement la couche limite, que cette couche devient impénétrable au mycélium des Champignons et contribue ainsi à garantir d'un danger imminent la partie non encore attaquée de l'arbre.

Les exemples qui précèdent, et dont il ne serait pas difficile d'augmenter le nombre, suffisent à prouver que la résine des Conifères, en recouvrant leurs plaies, concourt dans une large mesure à atténuer pour eux les suites fâcheuses que les lésions entraînent ordinairement chez les autres arbres.

Maintenant, toutefois, se présente la question de savoir si c'est dans cette participation à la guérison des plaies que doit être cherchée la vraie fonction de la résine. Pour pouvoir répondre d'une manière complète à cette question, nous devons, d'une part, considérer la distribution des canaux résinifères et, d'autre part, fixer notre attention sur les propriétés particulières des produits résineux.

Suivant leur direction, les canaux résinifères du bois et de l'écorce des Conifères peuvent être divisés en horizontaux et verticaux. Surtout la situation des premiers parle clairement en faveur de la présomption ci-dessus énoncée. Ils s'étendent dans les rayons médullaires, par exemple chez *Abies excelsa*, *Larix europœa*, *Pinus sylvestris*, et d'ordinaire on ne les trouve pas dans tous les rayons, mais seulement dans des rayons spéciaux, qui se distinguent à première vue des autres par leur épaisseur plus grande. Dans le bois, ces canaux sont généralement très étroits, mais à leur terminaison dans l'écorce ils

[1]) R. Hartig, *l. c.*, p. 91.

sont presque toujours fortement élargis et par conséquent beaucoup plus riches en résine. Ils n'ont de communication ni entre eux, ni avec les canaux verticaux. Lors de la destruction d'une partie de l'écorce, par exemple sous la dent des animaux sauvages, ces canaux sont ouverts en grand nombre et rendent alors d'excellents services pour le recouvrement complet de la plaie.

Les canaux résinifères verticaux parcourent le bois et l'écorce sur de grandes longueurs et communiquent en divers points les uns avec les autres. Grâce à cette disposition, ils peuvent amener des quantités considérables de résine et contribuer ainsi à la guérison de toute plaie qui pénètre transversalement dans l'écorce ou dans le bois.

Une très remarquable propriété des canaux résinifères du bois est la suivante, que M. Frank a décrite chez le *Pinus sylvestris*. Tout autour des cellules de l'épithélium, on trouve ici une couche de cellules allongées, dont les parois sont minces et peu pénétrées de matière ligneuse; ces cellules, d'après M. Frank, développent la pression à laquelle la résine est soumise dans le canal et en vertu de laquelle elle s'épanche à la surface des plaies récentes. En présence du fait que le bois est constitué presque entièrement de cellules sans contenu et paraît par conséquent incapable d'exercer par lui-même une pression sur les canaux résinifères, la particularité en question offre un haut intérêt. Car elle nous apprend que cette pression, loin d'être simplement un effet secondaire de la tension des cellules ambiantes, doit bien dûment être regardée comme de la plus grande importance pour les plantes résinifères. Plus que tout autre phénomène, ce fait indique que la signification des matières résineuses, chez les Conifères, doit être cherchée dans les fonctions qu'elles remplissent en s'écoulant des plaies.

Une circonstance également digne d'attention, c'est que les blessures n'ont pas seulement pour conséquence un écoulement de résine des canaux déjà existants, mais qu'elles donnent lieu aussi à l'apparition d'un grand nombre de nouveaux canaux résinifères dans le bois traumatique qui se forme près d'elles,

et par là contribuent indirectement à augmenter la quantité de résine dans leur voisinage immédiat. M. Ratzeburg avait déjà mentionné que les couches ligneuses qui prennent naissance après une lésion, sont plus abondamment pourvues de canaux résinifères que le bois normal du même arbre; surtout chez le Mélèze, les couches recouvrantes sont souvent extrêmement riches en organes de ce genre, et dans l'écorce de ces formations nouvelles il n'est pas rare de rencontrer, en nombre anormal, des accumulations de résine. Aussi après l'abattage de branches, ou quand le bois a été attaqué par différents insectes, M. Ratzeburg a observé la multiplication des canaux résinifères.

On peut donc provoquer artificiellement la formation de nouveaux canaux résinifères, au moyen de lésions convenablement pratiquées sur des tiges ou des branches en voie d'accroissement. Même de petites incisions, pénétrant jusque dans le bois, suffisent pour produire ce résultat, ainsi que je l'ai observé très nettement dans le bois traumatique d'une jeune branche d'*Abies nigra*, dans laquelle j'avais fait, en 1872, quelques incisions longitudinales. Entre ces plaies s'étaient formés, très nombreux et très rapprochés les uns des autres, de nouveaux canaux résinifères, disposés suivant un cercle concentrique aux lignes d'accroissement annuel [1]).

Ces dernières observations déposent si nettement en faveur d'une relation entre la résine et les lésions, qu'elles seules devaient déjà faire présumer que le rôle de la résine consiste dans son action conservatrice sur les tissus dénudés. Mises en rapport avec les autres faits communiqués, elles nous apprennent que la formation si compliquée des canaux résineux est adaptée tout entière, de la manière la plus parfaite, à ce but conservateur.

A la même conclusion conduit aussi l'étude détaillée des propriétés des matières qui sont sécrétées dans les canaux résinifères. Ceux-ci, en réalité, ne contiennent pas de résine, mais des combinaisons susceptibles de se transformer en cette substance

---

[1]) *Flora*, 1876, p. 121.

sous l'influence oxydante de l'air [1]). Selon l'opinion reçue, le produit originaire des canaux résinifères est à l'état d'essence de térébenthine, dont l'élément principal consiste en carbures d'hydrogène de la composition des terpènes ($C_{10}H_{16}$) [2]). Au contact de l'atmosphère, ces carbures absorbent de l'oxygène et se changent peu à peu en résine, de sorte que les masses exsudées des plaies constituent des mélanges variables de résine et d'essence de térébenthine. Les plaies fraîches laissent écouler de l'essence pure, ou un mélange dans lequel l'essence domine fortement; l'enduit dont ce mélange recouvre les plaies durcit et se transforme entièrement en résine après un temps suffisant. Il serait difficile d'imaginer une adaptation mieux entendue à la guérison des plaies.

Une autre adaptation au même but nous est offerte dans l'imprégnation, par la résine, des fibres ligneuses mourantes ou mortes. Ce sujet extrêmement intéressant a déjà été étudié par von Mohl, en 1859 [3]). Il fit voir que dans les parties vivantes du corps ligneux la résine n'existe que dans les canaux résinifères [4]); mais il ajoute immédiatement que cela n'est pas toujours le cas pour les couches annuelles déjà anciennes. Dans celles-ci, la résine se présente aussi comme substance infiltrée, qui imprègne les parois cellulaires, remplit çà et là plus ou moins complètement les cavités des cellules et se rassemble dans les fentes du bois. Von Mohl constata ce fait aussi bien dans les espèces dont le bois est riche en canaux résinifères, que dans celles où ces canaux sont bornés à l'écorce (par exemple, *Abies pectinata*). Mais, tandis que chez les premières l'imprégnation est un phénomène très général, chez les dernières elle ne se rencontre,

---

[1]) Hlasiwetz dans: Wiesner, *Die technisch verwendeten Gummi-arten, Harze und Balsame*, 1869, p. 72.

[2]) Frank, *Die Krankheiten* etc., p. 75.

[3]) Von Mohl. *Bot. Zeitung*, 1859, p. 340.

[4]) Qu'il me soit permis de rappeler ici que la méthode suivie par quelques auteurs pour déceler la résine dans les coupes microscopiques, au moyen de la matière colorante de l'alcanna, peut conduire à des conclusions inexactes. Des résultats parfaitement sûrs s'obtiennent le plus facilement par la méthode connue de M. Franchimont (*De terpeenharsen*, 1871), consistant à soumettre les branches au traitement préalable par l'acétate de cuivre.

par la nature même des choses, que dans une mesure assez restreinte.

Cette imprégnation s'opère à un degré beaucoup plus prononcé dans les souches d'arbres abattus, dans les chicots morts qu'ont laissés sur le tronc les branches cassées, et même assez souvent dans la partie inférieure de branches encore vivantes. Il en est de même partout où l'activité vitale est affaiblie par des lésions internes ou externes. Ainsi, par exemple, c'est un fait d'observation vulgaire qu'au voisinage des entailles pratiquées aux arbres dont on extrait la résine, le bois absorbe une partie de la matière excrétée par les plaies et occasionne en conséquence une perte souvent sensible. Il est inutile de rappeler encore une fois que cette imbibition de la résine dans le bois, qui dépérit par l'effet de l'âge ou d'une lésion, constitue pour la partie vivante du corps ligneux, surtout en cas de plaies profondes, un excellent préservatif contre la pourriture et les autres actions malfaisantes de l'atmosphère.

Les résultats auxquels nous ont conduits les études brièvement exposées ci-dessus peuvent être résumés, notamment pour le Pin ordinaire, de la manière suivante. Par l'abondance des canaux résinifères dans le bois et l'écorce des Conifères, par l'expression lente mais régulière de leur contenu à la surface des plaies récentes, par les remarquables propriétés chimiques de ces produits de sécrétion, et enfin par une série d'adaptations spéciales, le recouvrement des plaies accidentelles et leur protection contre toutes sortes de préjudices sont assurés d'une façon aussi parfaite qu'on puisse l'imaginer. Le traitement artificiel le plus intelligent, appliqué aux plaies des arbres à feuilles, peut à peine rivaliser avec ce processus de curation naturelle. Or, l'importance extrême de la guérison des plaies pour la vie de ces plantes est suffisamment démontrée par les suites désastreuses que les blessures graves ont si souvent chez les arbres ordinaires. Si l'on réfléchit, en outre, que les Conifères sacrifient à la formation de la résine des quantités très considérables de matériaux nutritifs, et que ce produit de sécrétion, partout

où il y a absence de lésion, reste confiné dans les canaux résinifères, sans consommation ultérieure, il semblera permis de conclure que la fonction de ces canaux et de leurs produits doit être cherchée dans la part qu'ils prennent à la guérison des plaies.

La fonction des sucs, analogues à la résine des Conifères, qu'on trouve chez d'autres plantes.

Après avoir reconnu que la solution de la question posée ne suscite aucune espèce de difficultés en ce qui concerne les Conifères, nous allons maintenant examiner si les autres matières, qui se rapprochent physiologiquement de la résine de ces arbres, ont aussi à remplir dans la vie des plantes un rôle analogue. Les sucs dont il s'agit ont déjà été nommés au début de ce travail; les principaux sont, comme on se le rappellera, les matières résineuses, la gomme et le suc laiteux. Parmi eux, toutefois, le suc laiteux mérite encore une mention spéciale, en tant qu'il n'appartient qu'en partie à notre sujet. Chacun sait que le suc laiteux est du nombre des matières qui, de longue date, ont attiré plus que d'autres l'attention des phytotomistes. Les nombreuses recherches auxquelles il a donné lieu ont conduit aux résultats les plus remarquables quant à la nature des organes qui le renferment. On a été moins heureux dans l'étude physiologique du rôle que le suc laiteux joue dans l'économie des plantes. Des opinions très diverses ont été émises à cet égard, mais aucune certitude n'a encore été acquise. La raison en est surtout que le suc laiteux, en vertu de sa composition chimique extrêmement complexe, a probablement à remplir des fonctions très différentes, lesquelles jusqu'ici n'avaient pu être étudiées isolément les unes des autres. Cela n'est devenu possible que lorsque M. Sachs [1]) eut montré que les éléments essentiels du suc laiteux se laissent partager en deux groupes, dont l'un comprend les substances nutritives et l'autre les pro-

[1]) Sachs, *Experimentalphysiologie*, p. 380.

duits dits de sécrétion, c'est-à-dire, principalement, le caoutchouc, la résine et la cire. Cette distinction nous fait connaître le rapport du suc laiteux aux autres sucs propres, car il est de toute évidence que ce rapport doit être cherché, non dans la présence des substances nutritives, mais exclusivement dans celle des matières qui ne servent plus à la nutrition. Lors donc que je parlerai du rôle du suc laiteux, j'aurai toujours en vue la signification qu'il possède à raison de ceux de ses éléments que M. Sachs rapporte à la seconde catégorie [1]).

Après ces remarques préliminaires, je vais reprendre, au sujet des principaux produits de sécrétion ci-dessus nommés, les questions étudiées à l'égard des Conifères, et par conséquent chercher, en premier lieu, si ces matières sont des produits accessoires inutiles de l'échange nutritif, ou bien si elles ont à remplir un rôle important dans la vie des plantes.

Quand on considère l'abondance de ces matières dans le règne végétal, leur composition souvent très complexe, la structure anatomique élevée que leurs réservoirs ont acquise dans une foule de cas, et enfin les quantités considérables de substances nutritives nécessaires à leur formation, on ne saurait douter que les plantes ne doivent retirer de la possession de ces sucs quelque bénéfice notable. Suivant les idées généralement admises aujourd'hui, l'acquisition de propriétés et d'organes déterminés, au cours des générations successives, n'a lieu en effet que sous l'influence de la sélection naturelle dans la lutte pour l'existence, et par conséquent les propriétés qui dans cette lutte constituent un avantage pour leurs possesseurs peuvent seules arriver à un haut degré de développement. Réciproquement, du haut degré de différenciation que nous constatons ici dans un très grand nombre de cas, on peut donc conclure avec certitude à un avantage prononcé dans la lutte pour l'existence, en d'autres termes, à une utilité réelle pour les espèces en question.

---

[1]) Pour ce qui regarde les autres éléments du suc laiteux, je renvoie au Mémoire, déja cité, que j'ai publié dans les *Landwirthschaftliche Jahrbücher*.

Mais il est non moins évident que cette utilité doit être d'une nature très spéciale. Car, bien que les sécrétions dont il s'agit soient largement répandues dans le règne végétal, il s'en faut de beaucoup qu'on les trouve chez toutes les plantes, sans exception. C'est ainsi qu'elles sont relativement rares chez les Thallophytes et que, parmi les plantes d'une organisation supérieure, elles manquent aussi dans de nombreuses espèces et même dans des familles entières. Telles sont, par exemple, les Palmiers, les Cypéracées, les Graminées, beaucoup de Crucifères et de Renonculacées, etc. On peut donc présumer qu'elles remplissent leurs fonctions dans des circonstances particulières, qui chez certaines plantes se présentent plus fréquemment et plus régulièrement que chez d'autres.

Ce rôle doit d'ailleurs être le même pour les différentes matières énumérées. C'est ce qu'il est permis d'inférer, en premier lieu, de ce qu'elles ne constituent pas des produits nettement séparés les uns des autres, mais sont au contraire unies entre elles par de nombreuses formes intermédiaires. Comme exemple je citerai les gommes-résines, qui par une longue série conduisent insensiblement des résines à la gomme et relient par conséquent l'un à l'autre deux termes, en apparence entièrement différents, de notre groupe. Non moins nombreux sont les passages entre les solutions limpides de gomme et les liquides rendus troubles par les matières granuleuses qu'ils tiennent en suspension, liquides qui atteignent leur plus haut développement dans les vrais sucs laiteux. Un aperçu très complet de tous ces produits a été donné par M. de Bary dans sa *Vergleichende Anatomie*, de sorte qu'il est inutile que nous nous en occupions davantage.

Un second fait qui plaide en faveur de l'affinité physiologique de nos matières, c'est que chez des plantes différentes elles se remplacent en quelque sorte les unes les autres et qu'il est extrêmement rare de trouver deux termes du groupe réunis chez une seule et même espèce. Mais comme ce point, très important pour notre étude, a également été traité en détail dans l'ouvrage de M. de Bary, il suffit que nous l'ayons brièvement indiqué ici.

En troisième lieu, une remarquable concordance est établie par le fait que toutes ces matières, dans la vie normale, ne sont jamais redissoutes et enlevées de leurs réservoirs, pour prendre de nouveau part aux processus nutritifs. De même, elles sont toutes complètement inactives, tant qu'elles demeurent incluses dans les réservoirs. Aussi longtemps que ces organes restent fermés, elles n'ont donc évidemment aucune signification pour la plante. Cette considération est surtout importante parce qu'elle exclut, au sujet des fonctions de ces matières, toute hypothèse dans laquelle leur rôle ne serait pas rattaché aux blessures.

A ce point de vue, il est remarquable aussi que toutes ces matières se trouvent sous une certaine pression, qui est la cause de leur écoulement des plaies. Cette pression paraît être engendrée de manières différentes dans des organes différents, circonstance dont il n'y a pas lieu de s'étonner dans un domaine où nous voyons partout, adaptées à un même but, des structures et des sécrétions si diverses.

Si ces considérations nous conduisent à admettre pour tous les membres du groupe un seul et même rôle et à borner nos présomptions aux phénomènes qui se produisent en cas de blessures, il convient d'examiner maintenant les modifications que ces combinaisons éprouvent après leur épanchement à la surface des plaies. Pour les matières résineuses, ces changements sont, en tant qu'on sache, les mêmes que chez les Conifères. Les produits gommeux se transforment par le dessèchement en masses solides, ou par l'absorption d'eau en masses mucilagineuses, mais sans montrer de changements sur lesquels il soit nécessaire de s'étendre en ce moment. Nous pouvons donc passer de suite au suc laiteux, et, d'après ce qui a été dit de la distinction faite par M. Sachs entre les divers éléments de ce suc, nous n'avons à nous occuper ici que de ceux de ces éléments qui, une fois formés, ne rentrent plus dans le cycle nutritif et par conséquent ne subissent, dans les organes mêmes, aucun changement ultérieur.

Ce qui attire tout d'abord l'attention, c'est que les matières en question (résine, caoutchouc et cire) sont toutes des corps mous et glutineux, dont les particules adhèrent facilement les unes aux autres et peuvent se réunir en masses ou en membranes plus ou moins étendues. C'est effectivement ce qui a lieu dès que le suc laiteux apparaît à la surface des plaies, ainsi que nous le décrirons tout à l'heure. A l'exemple de M. Mohl, on peut facilement se convaincre des susdites propriétés par l'observation au microscope, entre deux lames de verre, de sucs laiteux à grosses granulations; en faisant doucement glisser les lames l'une sur l'autre, alternativement dans les deux sens, on voit que les granulations sont molles et glutineuses et qu'elles se laissent aisément réunir par la pression.

Mais, en quitant ses réservoirs, le suc laiteux montre encore d'autres changements, qui pour nous sont du plus haut intérêt. Ils sont tellement frappants, que les phytophysiologistes anciens en avait déjà connaissance. Meyen en donne la description suivante: „Lorsqu'on rassemble de grandes quantités du suc laiteux des Euphorbes ou d'autres plantes, il se sépare bientôt en deux parties, dont l'une forme un liquide ayant la limpidité de l'eau, tandis que l'autre est plus consistante et renferme toutes les particules qui nageaient dans le suc laiteux" [1]). M. de Bary dit, à ce même sujet [2]): „Aussitôt qu'un suc laiteux arrive au contact de l'air, et plus rapidement encore sous l'influence de l'eau, il se produit, au sein même du liquide primitivement clair et homogène, indépendamment de l'agglutination des granules simplement suspendus, des coagulations, qui enveloppent ces granules et se séparent avec eux de la partie liquide."

Dans certains cas, le changement que les sucs laiteux résinifères éprouvent à l'air s'accompagne d'une absorption notable d'oxygène, qui doit probablement être attribuée à une transformation d'huile essentielle en résine, analogue à celle que nous avons

---

[1]) Meyen, *Physiologie*, t. II p. 406.

[2]) De Bary, *Vergleichende Anatomie*, p. 192.

vu s'opérer chez les Conifères. MM. Weiss et Wiesner ont décrit ce phénomène pour le suc laiteux de l'*Euphorbia Cyparissias* [1]), M. Trécul l'a fait connaître pour la sécrétion des Aloës [2]).

De toutes ces observations il résulte que les sucs laiteux, grâce à plusieurs propriétés chimiques des plus remarquables, sont en état, au moment où ils quittent leurs réservoirs, de former des membranes serrées et résistantes, qui peuvent arriver promptement à recouvrir toute la surface des plaies.

Les faits communiqués dans cette section de notre étude ne laissent, à mon avis, subsister aucun doute au sujet du rôle physiologique des matières dont il y est question. Tout indique qu'elles n'ont d'utilité pour les plantes que lorsque des blessures viennent ouvrir leurs canaux, circonstance dans laquelle elles étendent rapidement un enduit salutaire sur les parties dénudées, qu'elles protègent ainsi contre l'action pernicieuse de l'atmosphère.

Sur l'occlusion des plaies par les sucs épanchés.

Voyons maintenant si, par l'épanchement de suc laiteux et de gomme, les plaies peuvent être fermées aussi complètement que cela est le cas pour la résine, d'après ce qui a été dit dans notre première section. Pour le suc laiteux, la question est proprement superflue, car quiconque s'occupe de physiologie végétale aura bien eu l'occasion de s'assurer, par ses propres yeux, de la réalité du fait. Lorsqu'il s'agit, par exemple, d'expérimenter sur des branches coupées, mises pour différentes fins dans l'eau ou dans le sable humide, tout le monde sait que les plantes lactifères ne conviennent nullement, parce que, chez elles, l'absorption d'eau par la surface de section se fait avec une extrême difficulté. Le suc laiteux, qui s'écoule de la plaie,

[1]) Weiss *und* Wiesner, *Bot. Zeitung*, 1861, p. 42.

[2]) Trécul., *Ann. sc. nat.*, 5e ser., t. XIV, p. 80.

l'isole si complètement du milieu ambiant, que le bois mis à nu ne vient pas en contact direct avec l'eau.

Mais, que la gomme aussi soit capable de former sur l'extrémité d'une branche coupée un enduit assez parfait pour s'opposer absolument, même dans des circonstances très favorables sous tout autre rapport, à la pénétration de l'eau extérieure, voilà ce qui était inconnu, il y a peu d'années encore. Ce sont les recherches de M. Moll qui ont mis ce point hors de doute. Ses expériences offrent pour la solution du problème que nous avons en vue un intérêt tout spécial, parce qu'elles ont fourni une série de faits bien constatés et décisifs, précisément à l'égard de celle des substances en question dont on aurait le moins attendu un grand avantage pour l'occlusion des plaies. Pour cette raison, je crois devoir en donner un court résumé [1]).

Sur la branche courte d'un tube en U furent fixés hermétiquement, au moyen d'un petit caoutchouc, des rameaux vigoureux et feuillés de différentes plantes. Le tube ayant alors été rempli d'eau, on versait du mercure dans l'autre branche. Pendant 1—2 jours on notait la hauteur du mercure dans le tube et on observait si des changements appréciables se produisaient aux feuilles. Avec la plupart des plantes, le niveau du mercure baissait notablement durant ce temps, et des quantités considérables d'eau étaient donc refoulées dans le rameau. Par suite, selon l'espèce de la plante et l'âge des feuilles, tantôt des gouttes de liquide apparaissaient aux sommets et aux bords des feuilles, tantôt on voyait le liquide passer des faisceaux vasculaires dans les espaces intercellulaires et produire ainsi le phénomène de l'injection.

Chez quelques plantes, toutefois, la surface de la plaie se recouvrait de suc laiteux épanché ou d'une épaisse couche d'une substance mucilagineuse. Dans l'un et l'autre cas, les résultats différaient de ceux qui viennent d'être mentionnés. Même sous

---

[1]) Moll, *Versl. en Meded. d. Kon. Akad. v. Wet.*, Amsterdam, 2e Sér., t. XV, 1880, p. 259. Voir aussi: *Bot. Zeitung*, 1880, N°. 4.

une pression mercurielle assez forte, il n'y avait pas ou presque pas d'eau refoulée dans le rameau, ce qui prouve que l'enduit en question produisait une occlusion très parfaite.

Le tableau suivant contient les valeurs numériques communiquées par M. Moll pour quatre plantes sécrétant de la gomme; comme point de comparaison, j'y ajoute les résultats d'une expérience sur une plante à suc laiteux.

ESPÈCES.	Pression, en centimètres de mercure.		Eau refoulée, en c c.	Durée de l'expérience.
	A l'origine.	A la fin.		
I Espèces sécrétant de la gomme.				
Urera platyphylla	23,5	22,5	0,4	2 jours.
Sparmannia tuberosa . . .	22	22	0	id.
Tradescantia Warscewiczii	21	21	0	id.
Abutilon malvæflorum. . .	21	20	0,5	28 heures.
II Espèce à suc laiteux.				
Ficus aspera	19	19	0	2 jours.

Il est à peine besoin de dire que dans ces expériences les feuilles ne montraient ni injection, ni excrétion de gouttelettes liquides, bien que, en pieds enracinés et placés sous des cloches de verre, le *Tradescantia Warscewiczii*, par exemple, se couvre ordinairement d'une exsudation abondante.

Le cas d'une occlusion aussi parfaite est toutefois exceptionnel; chez la grande majorité des plantes soumises à l'épreuve en question, M. Moll réussit à injecter de l'eau dans les branches.

Si maintenant on rapproche ces résultats, d'une part de ce qui a été dit, dans la section précédente, des phénomènes auxquels nos sucs donnent lieu lorsqu'ils s'écoulent des plaies, d'autre part de l'efficacité que nous avons reconnue à la résine des Conifères pour la préservation du bois dénudé, et enfin des nombreuses observations isolées telles que chacun a probablement

eu l'occasion d'en faire à ce sujet, on ne pourra guère se refuser à admettre que tous ces sucs ne fournissent, aux tissus mis à découvert par des lésions, une protection contre les injures du monde extérieur.

Or il est facile de comprendre l'intérêt extrême d'une semblable protection. D'un côté, en effet, on sait combien sont innombrables, — surtout parmi les insectes, les mollusques et les vers, mais aussi, pour les grandes espèces végétales, parmi les rongeurs et autres groupes de taille plus ou moins forte, — les ennemis qui menacent incessamment les plantes, et comment ces animaux attaquent de préférence les organes dans lesquels sont accumulées le plus de matières nutritives et qui ont par conséquent le plus d'importance pour l'entretien de la vie de la plante. D'un autre côté, je rappellerai que partout flottent dans l'atmosphère des germes de corruption et de putréfaction, qui se déposent sur tous les tissus dénudés et de là étendent successivement leurs ravages. Même parmi les spores des vrais parasites, on pourrait sans peine citer des exemples d'espèces qui trouvent plus de facilité à se nicher sur des plaies découvertes qu'à pénétrer dans l'intérieur à travers les téguments intacts. En un mot, il n'y a aucun doute que des lésions ne se produisent très fréquemment dans le règne végétal et ne soient, à la longue, nuisibles au plus haut degré. Rien de surprenant, dès lors, si une foule de plantes possèdent les moyens de se mettre, autant que possible, à l'abri de ces inconvénients.

Avant de finir, qu'il me soit permis de présenter encore quelques remarques au sujet de la fonction que j'attribue à la résine, à la gomme, au suc laiteux et aux matières analogues pour l'occlusion des plaies, et notamment de dire quelques mots du rapport existant entre ce phénomène et l'occlusion des plaies par le liège de formation traumatique.

Quand on parle de la guérison des blessures, il faut distinguer, en général, deux choses essentiellement différentes. La guérison

proprement dite résulte toujours de formations nouvelles, qui ont lieu au sein même des tissus dénudés. Mais, dans la pratique, on entend ordinairement, par le mot guérir, appliquer un traitement qui doit déterminer, ou du moins favoriser, la fermeture des plaies. Très communément, en effet, des influences extérieures, en occasionnant la pourriture de la surface blessée, troublent et retardent le processus curatif naturel; en pareil cas, l'art peut intervenir et empêcher ces actions perturbatrices.

Or, dans la pratique, le traitement des plaies est borné aux végétaux ligneux, les opérations de ce genre s'excluant d'elles-mêmes chez les plantes herbacées. Chez celles-ci, on se contente ordinairement de veiller à ce que les circonstances soient aussi peu favorables que possible à l'altération et à la pourriture des tissus, ce qui s'obtient principalement en évitant toute humidité surabondante. Quant aux plaies des végétaux ligneux, tout le monde sait qu'elles peuvent être mises à l'abri de la pourriture par des moyens préservatifs. Généralement on a recours soit au goudronnage, soit à l'application d'une couche de mastic à greffer. La première de ces opérations entraîne, il est vrai, la mort des cellules qui viennent en contact immédiat avec le goudron, mais, à très peu de distance, les éléments restent vivants et indemnes. Chez les pins, le goudronnage est entièrement superflu, ainsi que nous l'avons déjà mentionné.

L'application d'une couche de goudron ou de mastic sur les plaies des plantes ligneuses procure un double avantage. D'abord, le bois est défendu contre la pourriture. Mais, en second lieu, l'enduit favorise la formation de ces bourrelets caractéristiques qu'on rencontre partout, autour des plaies plus ou moins anciennes, chez les arbres et les arbrisseaux, et qui finissent, souvent après de longues années, par se rejoindre au-dessus de la plaie et par la recouvrir entièrement. Ce processus est toutefois si lent, qu'il ne peut prévenir l'altération du bois, et celle-ci, une fois commencée, s'étend de plus en plus, même après que la plaie s'est fermée. En l'absence d'un enduit de mastic ou de goudron, ou, s'il s'agit de Conifères,

en l'absence d'un épanchement de résine, l'occlusion des plaies, chez les arbres et les arbrisseaux, reste donc toujours plus ou moins imparfaite.

Si pour les plantes ligneuses il importe tant que les plaies soient mises promptement à couvert de la pourriture, on peut bien admettre qu'une pareille protection doit aussi avoir de l'utilité chez les végétaux herbacés. La circonstance que dans ces cas la pratique s'abstient de toute opération et abandonne à la nature seule le soin de guérir, ne s'oppose en rien à cette induction. Bien au contraire, elle tendrait à faire présumer qu'une protection artificielle est superflue chez ces plantes, en d'autres termes, que la nature elle-même y a pourvu, là où c'était nécessaire. Or, sachant que chez beaucoup d'espèces les plaies donnent issue à des sucs, qui à l'air se transforment en un revêtement continu, nous sommes bien forcés de voir dans ces sucs les agents préservateurs cherchés. Par cette voie aussi, nous arrivons donc à la même conclusion.

Revenons encore un instant au processus curatif naturel. Chez les organismes de structure simple, tels, par exemple, que les Thallophytes, les prothalles des Fougères, les Mousses, etc., il arrive simplement, après une lésion, que les cellules restées intactes continuent à vivre et que les cellules blessées meurent; rarement la perte est réparée par les cellules vivantes. Mais chez les plantes d'une organisation plus élevée, la guérison consiste en ce que, sur la surface blessée, il se forme un tissu particulier, différent du tissu normal; ordinairement, cette formation nouvelle procède des cellules les plus rapprochées de la plaie. Elle donne naissance ou bien à du liège traumatique, ou bien à du callus. L'un et l'autre résultent de segmentations par des cloisons parallèles à la surface. Dans le cas du liège traumatique, il se produit ainsi une couche, le plus souvent composée d'un petit nombre d'assises de cellules, d'un tissu dont les parois cellulaires s'imprègnent plus tard de matière subéreuse. D'ordinaire, ce nouveau tégument rejoint de tous les côtés le tégument normal et la plaie est alors complètement

fermée. Dans le cas seulement où la blessure a atteint des faisceaux vasculaires ou libériens, la jonction n'est pas toujours parfaite, attendu que ces organes sont composés, en entier ou en majeure partie, d'éléments privés de vie et ne prenant aucune part à la formation du liège. Pour ceux-ci, le revêtement par la résine ou par quelque autre exsudation analogue reste souvent pendant longtemps l'unique protection.

Sous le nom de callus, on entend un tissu dont les cellules, généralement grandes, sont à parois minces, et qui se distingue du liège traumatique en ce qu'il s'accroît en dehors de la surface blessée. Dans ce tissu primitivement homogène, il s'opère ordinairement plus tard une différenciation, qui donne lieu, entre autres, à un revêtement de liège traumatique. La formation de callus est donc en quelque sorte une formation indirecte de liège, mais qui, sous un rapport important, l'emporte sur la production subéreuse directe; par le callus, en effet, sont recouverts les organes et les tissus (par ex. le bois et le liber) qui eux-mêmes ne prennent aucune part à la formation nouvelle, de sorte que le tégument subéreux, constitué postérieurement, peut aussi isoler ces parties-là du monde extérieur.

Toutefois, avec l'un et l'autre de ces processus, il se passe un certain temps, souvent assez long, avant que les tissus dénudés ne soient complètement recouverts d'un tégument nouveau. Durant cette période, les sucs laiteux, gommeux ou résineux d'une foule de plantes, en s'épanchant sur les surfaces blessées, les garantissent, à mon avis, de la pourriture et en favorisent ainsi la guérison rapide et complète.

LES FORMULES FONDAMENTALES

DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR

H. A. LORENTZ.

---

§ 1. Dans sa „Théorie générale des forces pondéromotrices" [1]), M. Korteweg a cherché la loi la plus générale qui puisse être admise pour l'action électrodynamique de deux éléments de courants. Quelques hypothèses, si naturelles qu'elles semblent à l'abri de toute objection, conduisent d'abord, pour cette action, à des expressions contenant un certain nombre de fonctions inconnues. Celles-ci sont ensuite déterminées, autant que possible, par la considération des cas où l'action électrodynamique est entièrement connue.

J'ai trouvé qu'on peut arriver à ces mêmes résultats par une autre voie, qui n'implique pas l'introduction de plus de fonctions inconnues qu'il n'en reste subsister dans l'expression finale. Cette méthode, que je vais développer, le cède à celle de M. Korteweg en ce qu'elle a besoin, comme point de départ, d'une loi particulière pour l'action des éléments de cou-

---

[1]) Korteweg, *Algemeene theorie der ponderomotorische krachten*, dans *Natuurk. Verh. der Akad. v. Wet.*, t. XX, et, plus tard, sous une forme simplifiée, due aux remarques de M. van der Waals, dans *Journal für Mathematik*, t. XL.

rants; mais elle présente, au moins pour des éléments incomplets, l'avantage d'être plus simple. Pour les éléments complets, elle a l'inconvénient d'en faire reposer la considération sur celle des éléments incomplets, tandis que M. Korteweg traite les deux cas indépendamment l'un de l'autre.

Naturellement, il doit être fait usage de l'action entièrement connue d'un courant fermé sur un élément (incomplet) d'un autre courant. J'ai donc, dans les premiers §§, indiqué comment on peut avec certitude déduire cette action des observations, sans recourir à une formule représentant l'action mutuelle de deux éléments. Je donne ensuite, à partir du § 8, le développement des expressions générales pour cette dernière action.

§ 2. Les mesures les plus exactes, que nous possédions sur les phénomènes électrodynamiques, ont appris que l'action mutuelle de deux circuits linéaires fermés, qui se comportent comme des corps solides de forme invariable, et qui ne peuvent par conséquent éprouver que des déplacements et des rotations, est exactement égale à celle de deux couches magnétiques doubles. Pour obtenir celles-ci, figurons-nous pour chaque circuit une surface limitée dont il forme le contour, puis une seconde surface située partout à une distance infiniment petite de la première, et distribuons sur ces surfaces respectivement du magnétisme nord et du magnétisme sud, de telle sorte qu'à chaque quantité de magnétisme nord sur l'une corresponde une quantité égale de magnétisme sud sur l'autre, et que le produit de la densité superficielle par la distance des deux surfaces (le moment de la couche double) soit partout égal à l'intensité du courant, exprimée en unités électromagnétiques. Le magnétisme nord devra être appliqué à ce côté de la couche d'où la direction du courant paraît opposée à celle des aiguilles d'une montre. Une pareille direction de rotation sera appelée positive, celle des aiguilles d'une montre, négative. En général, nous dirons que la direction d'une rotation et celle d'une droite perpendiculaire à son plan concordent, lorsque la droite est dirigée vers le côté d'où la rotation est vue positive. Par cette règle sera déter-

minée, par exemple, la direction de l'axe d'un couple. Enfin, nous emploierons toujours un système d'axes de coordonnées où la direction de OZ correspond à celle d'une rotation de OX vers OY (par un angle droit.)

Nous désignerons, dans la suite, les deux circuits par s et s', les deux couches doubles par S et S', les éléments de ces lignes et de ces surfaces par ds, etc. Les normales élevées sur S et S', du côté positif, seront n et n'. Comme nous admettons d'ailleurs que toutes les actions sont proportionnelles aux intensités des courants, nous pouvons nous borner au cas où ces intensités, et par conséquent les moments des couches doubles, sont $= 1$.

§ 3. L'action réciproque de deux aimants est, comme on sait, entièrement déterminée par leur potentiel mutuel; pour deux courants fermés, il doit donc aussi exister une semblable fonction, dont la diminution à chaque déplacement ou rotation des conducteurs (l'intensité du courant étant maintenue constante) représente le travail des forces électrodynamiques.

Si φ est la fonction potentielle magnétique résultant du courant qui parcourt s' (ou de la couche double S'), le potentiel mutuel des deux courants est

$$P = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

expression qui doit être étendue sur toute la couche double S. Au moyen de quelques transformations on peut en déduire:

$$P = -\int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds\, ds', \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

ou ε désigne l'angle entre les éléments ds et ds' situés à la distance r l'un de l'autre, et où l'intégration doit être étendue le long des deux conducteurs.

Pour le but que nous avons en vue, la forme (1) est toutefois celle qui convient le mieux. On peut y attacher une significa-

tion simple. En indiquant par F_n la composante, suivant la direction n, de la force magnétique (provenant du courant en s'), on peut écrire au lieu de (1):

$$P = -\int F_n \, d\, S \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Si, dans le champ magnétique dépendant du courant en s', par tous les points d'une ligne fermée on mène des lignes de force, la surface tubulaire formée par celles-ci possédera la propriété que pour toutes ses sections l'intégrale $\int F_n \, d\, S$ aura la même valeur. On peut diviser l'espace en un grand nombre de tubes de ce genre, de telle sorte que, pour chacune de leurs sections, l'intégrale ait la valeur 1. L'équation (3) montre que P est alors le nombre, pris en signe contraire, de ceux de ces *tubes de force*, provenant de s', qui passent par S ou sont embrassés par s. Dans la supputation de ce nombre, les tubes de force doivent être portés en compte comme positifs ou comme négatifs, suivant que (pris dans la direction de la force magnétique) ils vont vers le côté positif ou négatif de S.

De ce qui vient d'être dit, il suit encore que, à chaque déplacement ou rotation du circuit s, le travail des forces électrodynamiques, qui agissent sur lui, est égal au nombre des tubes de force que s traverse dans son mouvement. On trouve ce nombre en faisant la somme algébrique des nombres des tubes de force coupés par les différents éléments de s. Lorsqu'un élément $A\,B$ (parcouru par le courant dans la direction de A vers B) est déplacé vers $A'\,B'$, le nombre des tubes de force qu'il coupe doit être pris positif ou négatif, selon que la force magnétique a la direction qui correspond à la rotation $B\,A\,A'\,B$, ou la direction opposée.

§ 4. Le premier pas à faire maintenant, pour la décomposition ultérieure de l'action électrodynamique, c'est de partager en éléments l'un des deux courants, par exemple s, et de chercher les forces qu'un semblable élément éprouve du courant en

s'. Pour arriver à la connaissance de ces forces, on peut faire usage de toutes les expériences qui ont pour objet l'action électrodynamique sur les parties d'un circuit, lorsque celles-ci sont mobiles les unes par rapport aux autres. Une seule de ces expériences est toutefois suffisante, à savoir celle d'Ampère, répétée plus tard par von Ettinghausen, par laquelle il a été prouvé qu'un arc de cercle parcouru par un courant, et qui peut tourner autour de son axe, n'est jamais mis en mouvement par un circuit fermé quelconque placé dans son voisinage.

Lorsqu'un élément ds est soumis à l'influence du courant s', toutes les forces qui agissent sur lui pourront toujours être transportées en un même point, pour lequel nous choisissons le milieu de ds; on obtiendra ainsi une force résultante et un couple. Or, le résultat de l'expérience d'Ampère et de von Ettinghausen subsistant pour tous les conducteurs en forme d'arc de cercle, il doit s'appliquer aussi aux éléments de courant, puisqu'on peut considérer ceux-ci comme de petits arcs circulaires. Toute droite, située dans le plan qui passe perpendiculairement par le milieu de l'élément, peut alors être prise pour l'axe de l'arc de cercle; autour d'aucune de ces droites, l'élément ne peut donc acquérir de rotation par l'action de circuits fermés. Il suit de là que la force résultante susmentionnée doit être perpendiculaire à l'élément et que l'axe du couple doit avoir la direction de cet élément.

§ 5. Pour déterminer d'abord la force, nous introduirons l'hypothèse que l'élément ds peut être remplacé par ses composantes dx, dy, dz. La première ne peut éprouver qu'une force parallèle au plan yz; les composantes de cette force, parallèles à l'axe des y et à l'axe des z, étant respectivement désignées par $k_z\,dx$ et $k'_y\,dx$, k_z et k'_y ne peuvent être que des fonctions des coordonnées x, y, z du point où l'élément est situé, fonctions qui doivent avoir des valeurs déterminées, dès que la forme et la position du courant s' sont données. De la même manière dy éprouve les forces $k_x\,dy$ et $k'_z\,dy$, dans la direction de l'axe des z et de l'axe des x; dz, les forces

$k_y\,dz$ et $k'_x\,dz$, dirigées parallèlement à l'axe des x et à l'axe des y. La force totale, qui agit sur ds, doit donc avoir les composantes

$$X = k'_z\,dy + k_y\,dz, \qquad Y = k'_x\,dz + k_z\,dx,$$
$$Z = k'_y\,dx + k_x\,dy.$$

Or, pour que cette force soit perpendiculaire à ds, il faut qu'on ait

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

ou

$$(k'_x + k_x)\,dy\,dz + (k'_y + k_y)\,dz\,dx + (k'_z + k_z)\,dx\,dy = 0.$$

Mais cela n'est possible, pour toutes les positions de l'élément, que si

$$k_x = -k'_x, \quad k_y = -k'_y, \quad k_z = -k'_z,$$

de sorte qu'il vient :

$$X = k'_z\,dy - k'_y\,dz, \quad Y = k'_x\,dz - k'_z\,dx,$$
$$Z = k'_y\,dx - k'_x\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En chaque point de l'espace on peut construire une droite terminée ϱ dont k'_x, k'_y, k'_z sont les composantes. Les équations (4) montrent alors que la force, éprouvée par ds, est perpendiculaire au plan mené par ds et ϱ, et égale à l'aire du parallélogramme ayant ces deux lignes pour côtés. La direction de la force correspond à la rotation de ds vers ϱ.

§ 6. Nous ferons voir maintenant que la droite ϱ représente la force magnétique résultant du courant s' et dont les composantes peuvent être représentées par K_x, K_y, K_z.

Considérons, à cet effet, un rectangle infiniment petit, dont les côtés dx, dy sont parallèles aux axes des x et des y, et

admettons que son contour soit parcouru dans le sens positif par un courant. Pour la force qui agit sur lui dans la direction de l'axe des x, on trouve alors facilement

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x} d\,x\,d\,y.$$

D'autre part, cette action est entièrement connue par ce qui a été dit au § 3. Si l'on imprime au rectangle un déplacement infiniment petit ε dans la direction de l'axe des x, le travail des forces électrodynamiques est

$$\varepsilon \frac{\partial K_z}{\partial x} d\,x\,d\,y.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial k'_z}{\partial x} = \frac{\partial K_z}{\partial x}.$$

De la même manière, on prouve que

$$\frac{\partial k'_z}{\partial y} = \frac{\partial K_z}{\partial y},$$

de sorte que $k'_z - K_z$ ne peut être qu'une fonction de z. Si l'on fait attention, toutefois, que pour x ou $y = \infty$ toute action magnétique et électrodynamique doit disparaître, il devient évident que partout on doit avoir $k'_z - K_z = 0$. De même, on trouve $k'_x = K_x$ et $k'_y = K_y$.

Par là il est bien démontré que dans le théorème du § précédent on doit entendre par ϱ la force magnétique.

§ 7. Il s'agit encore de savoir si, en outre de la force déterminée par ce théorème, $d\,s$ peut éprouver l'action d'un couple de la nature indiquée au § 4. Pour répondre à cette question, remarquons que, dans une rotation du rectangle considéré au § précédent, les *forces* trouvées accomplissent à elles seules un travail égal au nombre des tubes de force coupés, égal par

conséquent à la valeur que l'observation fournit pour le travail électrodynamique total. Les couples, s'ils existent, ne doivent donc, même en cas de rotation, accomplir aucun travail.

Le moment du couple qui agit sur un élément dx étant désigné par $L\,dx$, où L est une fonction de x, y, z, il suit de la condition qui vient d'être trouvée, si on l'applique à une rotation du rectangle $dx\,dy$ autour de l'axe des x:

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0\ .$$

On trouve de même:

$$\frac{\partial L}{\partial z}=0\,,$$

et comme L doit en tout cas disparaître à une distance infinie, on a partout:

$$L=0\ .$$

Ce résultat étant indépendant de la direction attribuée à l'axe des x, il n'existe jamais de couple et le théorème du § 5 détermine l'action totale exercée par s' sur l'élément ds.

Il résulte encore de ce théorème, que, dans le cas où les parties d'un circuit peuvent exécuter des mouvements quelconques les unes par rapport aux autres, il existe entre les tubes de force et le travail électrodynamique la même relation que dans le cas de déplacements et rotations d'un circuit de forme invariable. Ce résultat a été confirmé, entre autres, par des expériences de Boltzmann [1]), de von Ettinghausen [2]) et de Niemöller [3]).

§ 8. Après avoir partagé en éléments le circuit s, il faut exécuter la même division pour s', afin d'apprendre à connaître l'action que ds éprouve de la part d'un élément ds'. Pour trouver l'expression la plus générale de cette action partielle-

[1]) *Wiener Sitz. Ber.* t. 60. p. 69.

[2]) *Ibid.*, t. 77, p. 109.

[3]) Wiedemann's *Annalen*, t. 5, p. 433.

ment indéterminée, nous ferons d'abord une hypothèse particulière, après quoi nous chercherons quelles autres forces, outre celles trouvées par ce moyen, peuvent encore être admises. Il est indifférent, pour cette recherche, que nous partions de telle loi particulière d'action ou de telle autre, attendu que toutes ces lois n'en seront pas moins comprises dans le résultat final.

Nous choisissons donc l'hypothèse qui, après les développements précédents, paraît la plus naturelle. Elle consiste à diviser l'action magnétique exercée par s' en parties émanant des différents éléments $d\,s'$ et à admettre que l'action électrodynamique et l'action magnétique d'un pareil élément sont liées entre elles suivant la règle du § 5. On sait qu'on peut rendre compte de l'action magnétique d'un courant fermé, si l'on admet que la force magnétique, exercée par l'élément $d\,s'$ en un point P situé à la distance r, a une direction perpendiculaire au plan $(P,\ d\,s')$ et correspondant à la rotation de $d\,s'$ vers r, et une intensité déterminée par :

$$\frac{\sin\ (r,\ d\,s').\ d\,s'}{r^2}.$$

En conséquence, nous posons pour les composantes de la force magnétique exercée par $d\,s'$ sur le point $(x,\ y,\ z)$, quand $d\,s'$ lui-même est placé au point $(x',\ y',\ z')$,

$$\frac{z-z'}{r^3}\,d\,y'-\frac{y-y'}{r^3}\,d\,z',\ \text{etc.},$$

et pour les composantes de l'action électrodynamique de $d\,s'$ sur $d\,s$:

$$\left[\frac{y-y'}{r^3}\,d\,x'-\frac{x-x'}{r^3}\,dy'\right]d\,y-\left[\frac{x-x'}{r^3}\,d\,z'-\frac{z-z'}{r^3}\,dx'\right]d\,z,\ \text{etc.},$$

ou, après quelques réductions :

$$-\left[\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon+\frac{d\,x'}{d\,s'}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,s}\right]d\,s\,d\,s',\ \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ (5)$$

Il est facile de voir que ces expressions correspondent à la loi de Grassmann.

§ 9. Quelle que soit l'action entre les deux éléments de courant, on pourra toujours se la représenter comme composée des forces données par (5) et de quelque autre action, qui peut consister en forces et en couples. Pour déterminer cette „action secondaire", nous n'avons que la condition qu'elle s'évanouit dès que s' est fermé, puisque les forces (5), à elles seules, rendent entièrement compte de l'action d'un pareil courant.

En vertu de cette condition, l'action secondaire exercée par un élément $d\,s'$ peut être déduite de celle d'un courant qui vient d'une distance infinie et se termine en un point P', ayant pour coordonnées x', y', z'. D'abord, dès que l'élément $d\,s$ est donné, cette action ne peut dépendre que du lieu de P', vu que, pour deux courants qui viennent d'une distance infinie et s'arrêtent tous les deux en ce point, elle doit être la même. En effet, si l'on renverse la direction d'un de ces courants, ils forment ensemble un courant qui peut être regardé comme fermé et qui n'exerce par conséquent aucune action secondaire. Ensuite, aussitôt que l'action secondaire en question est connue comme fonction de x', y', z', il suffit de différentier celle-ci par rapport à s' pour obtenir l'action secondaire d'un élément quelconque $d\,s'$, placé en P'. Car un pareil élément $P'\,Q'$ peut être regardé comme la différence de deux courants venant tous les deux d'une distance infinie et terminés, l'un en P', l'autre en Q'.

§ 10. Pour déterminer l'action secondaire que l'élément $d\,s$ au point P (x, y, z) éprouve de la part du courant terminé en P', nous pouvons nous représenter celui-ci dirigé suivant le prolongement de la droite $P\,P'$. Nous admettrons, en outre, que toutes les forces agissant sur $d\,s$ sont transportées en son milieu, et nous déterminerons la force résultante et le couple, ainsi obtenus, par l'hypothèse qu'entre les images spéculaires (par rapport à quelque plan fixe) de deux courants électriques agissent les images des forces. Si l'on décompose alors $d\,s$ en deux composantes $(d\,s)_1$ et $(d\,s)_2$, respectivement dirigées suivant $P\,P'$ et suivant une perpendiculaire à cette droite, il suit de notre hypothèse que sur chacune de ces dernières ne peut

agir qu'une force secondaire dans sa propre direction. Ces forces seront proportionelles à la longueur de $(d\,s)_1$ et de $(d\,s)_2$ et ne pourront dépendre, du reste, que de la distance $P\,P' = r$, de sorte que nous pouvons les représenter respectivement par $R\,(d\,s)_1$ et $R_1\,(d\,s)_2$, R et R_1 étant des fonctions inconnues de r. Nous prenons celles-ci positives lorsque les forces ont les directions de $(d\,s)_1$ et de $(d\,s)_2$.

Il est toujours permis de poser $R = R_1 + R_2$, R_2 étant une nouvelle fonction inconnue. Après ce dédoublement, les deux forces $R_1\,(d\,s)_1$ et $R_1\,(d\,s)_2$, qui agissent sur $(d\,s)_1$ et $(d\,s)_2$, peuvent être composées en une force $R_1\,d\,s$ dirigée suivant $d\,s$; il existe alors, en outre, la force $R_2\,(d\,s)_1$ dans la direction de $(d\,s)_1$.

Pour les composantes de la force secondaire cherchée, qui agit sur $d\,s$, on obtient ainsi:

$$\left(R_1\frac{dx}{d\,s} + R_2\frac{\partial\,r}{\partial\,s}\frac{x - x'}{r}\right) d\,s, \text{ etc.}$$

§ 11. Dans la recherche du couple résultant de l'action du courant terminé en P' sur $d\,s$, on peut également faire usage de l'hypothèse des images spéculaires; seulement, il ne faut pas oublier que lorsqu'on prend l'image d'un couple, son axe n'est pas l'image de l'axe primitif, mais a une direction opposée à celle de cette image. On trouve alors facilement que sur la composante $(d\,s)_1$ il ne peut pas agir de couple, et que sur $(d\,s)_2$ il ne peut agir qu'un couple ayant son axe perpendiculaire au plan $(P', d\,s)$. Le moment de ce couple s'obtient en multipliant $(d\,s)_2$ par une fonction inconnue de r; nous appellerons celle-ci K, et regarderons comme positive la rotation de $d\,s$ vers r. Les composantes du couple deviennent alors:

$$\frac{K}{r}\left[(y - y')\frac{d\,z}{d\,s} - (z - z')\frac{d\,y}{d\,s}\right] d\,s, \text{ etc.}$$

§ 12. Les résultats des deux §§ précédents donnent, à l'aide

d'une différentiation par rapport à s', l'action secondaire de $d\,s'$ sur $d\,s$, et en ajoutant à celle-ci l'action que nous avons appris à connaître au § 8, on trouve pour la force totale, que $d\,s$ éprouve de la part de $d\,s'$, les composantes :

$$\left[-\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon-\frac{d\,x'}{d\,s'}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{d\,s}+\frac{\partial}{\partial\,s'}\left(R_1\frac{d\,x}{d\,s}+R_2\frac{\partial\,r}{\partial\,s}\frac{x-x'}{r}\right)\right]ds\,ds',$$

etc.

Ces expressions deviennent encore un peu plus simples si au lieu de R_2 on introduit la fonction R_3, à l'aide de la relation

$$\frac{R_2}{r}=\frac{d\,R_3}{d\,r},$$

ou de

$$R_3=-\int_r^{\infty}\frac{R_2}{r}\,d\,r.$$

Les composantes de la force deviennent alors

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3}+\frac{\partial^2 R_3}{\partial s\,\partial s'}\right)(x-x')+\frac{\partial R_1}{\partial\,s'}\frac{dx}{ds}-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+R_3\right)}{\partial\,s}\frac{dx'}{ds'}\right]dsds',\text{etc.}(6)$$

Le couple qui agit sur $d\,s$ a pour composantes

$$\frac{\partial}{\partial\,s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{d\,z}{d\,s}-(z-z')\frac{d\,y}{d\,s}\right]\right\}d\,s\,d\,s',\ \text{etc.}\quad .\ .\ .\ (7)$$

§ 13. Ces expressions, avec les trois fonctions inconnues R_1, R_3, K, déterminent l'action la plus générale qui puisse être admise entre les deux éléments de courants. Elles reçoivent encore une simplification si l'on introduit la condition que l'action et la réaction seront égales et opposées. Par l'échange des lettres pourvues d'accent et de celles qui en sont dé-

pourvues, (6) et (7) donnent les expressions relatives à l'action exercée par ds sur ds'. Veut-on alors, en premier lieu, que les forces agissant sur les deux éléments soient égales et opposées, on doit avoir, comme on le trouve immédiatement,

$$R_1 = \frac{1}{r} + R_3 \, , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

relation qui transforme (6) en

$$\left[\left(-\frac{\cos\varepsilon}{r^3} + \frac{\partial^2\left(-\frac{1}{r} + R_1\right)}{\partial s \, \partial s'}\right)(x-x') + \frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dx'}{ds'}\right] ds\, ds' . \quad (8)$$

Une seconde condition concerne les couples. Pour que l'action soit égale à la réaction, il faut que le système des deux éléments, quand ils sont liés invariablement l'un à l'autre, ne puisse prendre aucune rotation par l'effet des forces intérieures; le transport de toutes les forces en un même point ne doit donc donner lieu à aucun couple. Si l'on choisit pour ce point le milieu de ds et qu'on fasse usage pour les forces des expressions (8), on trouve pour les composantes du couple

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left\{\frac{K}{r}\left[(y-y')\frac{dz}{ds} - (z-z')\frac{dy}{ds}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{K}{r}\left[(y'-y)\frac{dz'}{ds'} - (z'-z)\frac{dy'}{ds'}\right]\right\} +$$
$$+ \left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dy'}{ds'}\right)(z'-z) - \left(\frac{\partial R_1}{\partial s'}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial R_1}{\partial s}\frac{dz'}{ds'}\right)(y'-y),$$

ou :

$$\frac{\partial\left(R_1 + \frac{K}{r}\right)}{\partial s'}\left[\frac{dz}{ds}(y-y') - \frac{dy}{ds}(z-z')\right] + \frac{\partial\left(R_1 + \frac{K}{r}\right)}{\partial s}\left[\frac{dz'}{ds'}(y'-y) - \frac{dy'}{ds'}(z'-z)\right] \text{ etc.}$$

Pour que le couple soit toujours 0, il faut qu'on ait:

$$K = - R_1 \, r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

L'égalité de l'action et de la réaction réduit donc les fonctions inconnues à une seule, R_1.

§ 14. Les résultats que nous venons d'obtenir concordent de tout point avec ceux auxquels M. Korteweg est arrivé pour des éléments de courant „incomplets." Pour l'action de pareils éléments, il introduit sept fonctions inconnues, entre lesquelles, lorsque l'égalité de l'action et de la réaction n'est pas admise, il trouve quatre relations, de sorte que, tout comme dans nos formules, il reste trois fonctions inconnues, indépendantes les unes des autres. Or il n'est pas difficile, en appliquant (6) et (7) à des cas particuliers, d'exprimer les fonctions de M. Korteweg en R_1, R_3 et K; on trouve ainsi

$$B = -\frac{dR_1}{dr} - \frac{dR_3}{dr} - r\frac{d^2 R_3}{dr^2},$$

$$C = \frac{1}{r^2} + \frac{dR_3}{dr},$$

$$(D) = \frac{K}{r},$$

$$E = -\frac{dR_1}{dr},$$

$$(F) = \frac{K}{r} + r\frac{d}{dr}\left(\frac{K}{r}\right),$$

$$G = \frac{1}{r^2} - \frac{dR_3}{dr},$$

$$(H) = -\frac{K}{r},$$

valeurs qui satisfont réellement aux relations qui doivent exister entre B, C, etc. [1]).

§ 15. D'après (6), la force qui agit sur l'élément ds peut être regardée comme composée de trois forces, dont la première est une attraction

[1]) Il faut, pour cela, poser dans les formules de M. Korteweg $A = 1$, vu que dans nos équations tout est exprimé en unités électromagnétiques.

$$\left[\frac{\cos \varepsilon}{r^2} - r \frac{\partial^2 R_3}{\partial s\, ds'}\right] d\,s\, d\,s',$$

tandis que la seconde et la troisième ont respectivement les directions de $d\,s$ et $d\,s'$ et sont données par

$$\frac{\partial R_1}{\partial s'}\, ds\, ds'$$

et

$$-\frac{\partial\left(\frac{1}{r} + R_3\right)}{\partial s}\, ds\, ds'.$$

Si l'on pose $R_1 = 0$ et $R_3 = -\frac{1}{r}$, il ne reste que l'attraction, dont la valeur devient

$$\left[-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right] ds\, ds'.$$

On a alors retrouvé, si l'on pose encore $K = 0$, la loi d'Ampère.

Comme on le sait, M. Stefan a établi une théorie qui embrasse celles d'Ampère et de Grassman. Cette théorie n'admet pas de couples, et suppose que toutes les actions électrodynamiques sont en raison inverse du carré de la distance. Cela revient à poser $R_1 = \frac{\alpha}{r}$, $R_3 = \frac{\beta}{r}$, $K = 0$.

Il est à peine besoin de dire que, au lieu de la loi de Grassmann, on aurait pu prendre tout aussi bien, comme point de départ de la théorie générale, la loi d'Ampère ou quelque autre. La recherche de l'action secondaire serait restée tout à fait la même.

§ 16. Quand on se pose la question de savoir si les fonctions R_1, R_3, K, dans (6) et (7), peuvent être déterminées de telle sorte que pour l'action mutuelle de deux éléments de courants il existe un potentiel, on trouve que cela n'est pas possible, ainsi qu'on pouvait d'ailleurs le prévoir en tenant

compte des expériences bien connues sur la rotation électrodynamique. Pourtant, si l'on envisage la question d'une manière un peu différente, l'établissement d'un potentiel devient possible. A cet effet, on distinguera, comme le fait M. Korteweg, des éléments de courant *complets* et *incomplets*. Un élément de la première espèce forme un tout limité; l'électricité en mouvement y tombe au repos à l'une des extrémités, tandis qu'à l'autre extrémité l'électricité se met en mouvement. Dans un élément incomplet, au contraire, l'électricité entre à l'une des extrémités et sort à l'autre. Un courant fermé pourra être considéré, à volonté, comme formé d'éléments complets dont les terminaisons de courants se neutralisent réciproquement, ou comme composé d'éléments incomplets; une portion mobile d'un pareil courant ne pourra toutefois être regardée que comme une somme d'éléments incomplets, puisqu'il ne s'y trouve pas de terminaisons de courants.

Il suit de là que dans les développements des § § précédents l'élément actif ds' peut aussi bien être complet qu'incomplet, mais que ds peut seulement être incomplet, vu qu'on a fait usage de l'expérience d'Ampère et de von Ettinghausen. Dès que l'élément qui éprouve l'action est complet, il y a lieu d'admettre des actions non comprises dans (6) et (7). Aussi M. Korteweg ne trouve-t-il, dans ce cas, que deux relations entre les sept fonctions inconnues, de sorte que cinq de ces fonctions restent indéterminées; il montre que celles-ci peuvent alors être choisies de façon qu'il existe un potentiel.

§ 17. Si l'on a adopté la méthode des § § 9—12, on pourra maintenant raisonner de la manière suivante. L'action que l'élément ds' (qu'on peut se figurer complet ou incomplet) exerce sur l'élément incomplet ds, sera donnée par (6) et (7). Si ds devient complet, il ne pourra s'ajouter à cette action que des forces agissant sur les extrémités de ds; ces forces sont donc les seules que nous ayons encore à considérer.

D'abord, de l'hypothèse que le renversement du courant entraîne aussi le renversement de l'action électrodynamique, on

peut déduire que les forces agissant, au même point du même élément, d'abord sur une origine puis sur une terminaison de courant, sont égales et opposées. Nous n'avons donc à nous occuper que des forces agissant sur des *terminaisons* de courants.

En introduisant ensuite l'hypothèse que l'action éprouvée par un courant non fermé, à terminaisons, approche de zéro quand la longueur diminue indéfiniment, et cela quelque forte que soit la courbure du conducteur, on peut démontrer que l'action de ds' sur une terminaison de courant, placée au point P, doit être indépendante de la direction du courant auquel cette terminaison appartient, et par conséquent ne peut dépendre que de la place de P par rapport à ds'.

Or, si l'on décompose cet élément en une composante $(ds')_1$ suivant la ligne de jonction $P'P$ et une composante $(ds')_2$ perpendiculaire à la première, il suit de l'hypothèse des images spéculaires, que chacune de ces composantes ne peut exercer, sur la terminaison de courant située en P, qu'une force dans sa propre direction.

On pourra représenter ces forces respectivement par $T(ds')_1$ et $T_1(ds')_2$, T et T_1 étant des fonctions inconnues de r. Si l'on introduit en outre la nouvelle fonction $T - T_1 = T_2$, l'action peut aussi être conçue comme formée d'une force $T_1\,ds'$ dans la direction de ds' et d'une force $T_2\,(ds')_1$ dans la direction de $(ds')_1$. Les composantes de la force totale deviennent donc

$$\left(T_1 \frac{dx'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x' - x}{r}\right) ds', \text{ etc.}$$

Les forces qui agissent sur les deux extrémités de ds étant alors transportées au milieu de cet élément, il en résulte une force

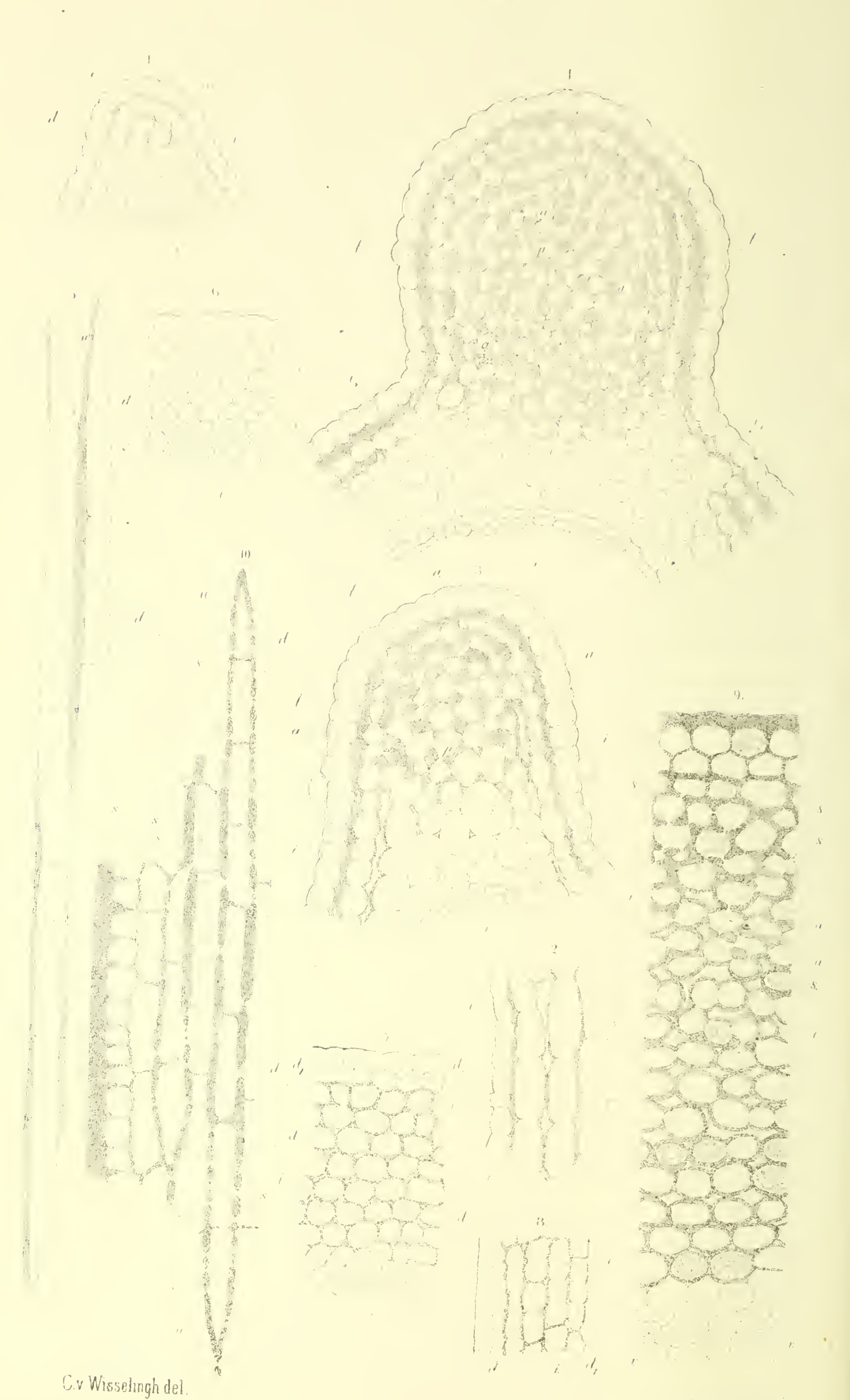
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T_1 \frac{dx'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{x' - x}{r}\right) ds\, ds', \text{ etc.}$$

et un couple

$$\left\{\left(T_1 \frac{dz'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{z'-z}{r}\right)\frac{dy}{ds} - \left(T_1 \frac{dy'}{ds'} + T_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \cdot \frac{y'-y}{r}\right)\frac{dz}{ds}\right\} ds\, ds',$$

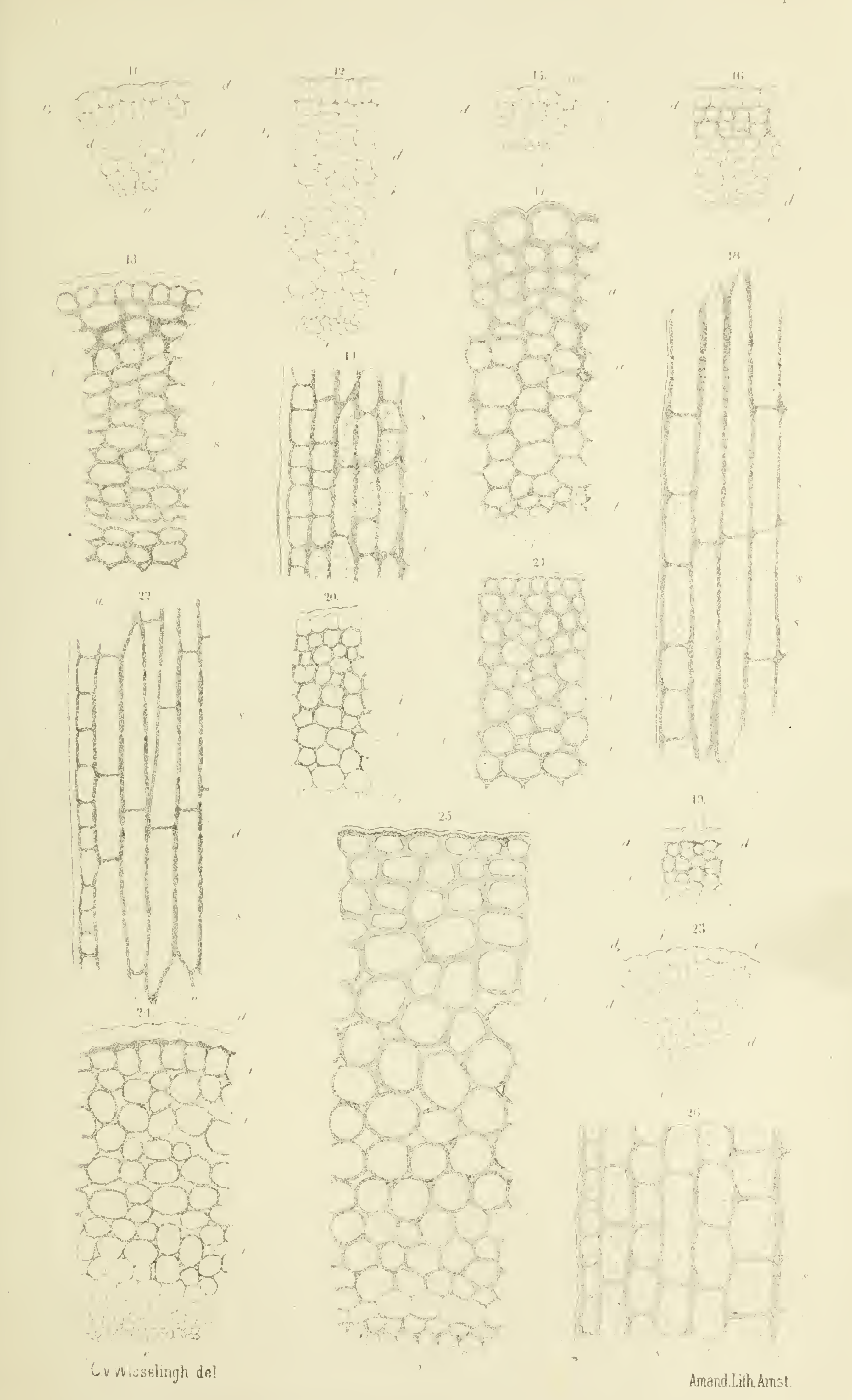
etc.

En ajoutant enfin ces expressions à (6) et (7), on obtient les valeurs les plus générales qui puissent être admises pour les composantes de la force et du couple, quand ds est un élément complet. Les résultats sont de nouveau conformes à ceux de M. Korteweg, de sorte que, après son étude approfondie, il nous paraît superflu de montrer encore que les fonctions R_1, R_3, K, T_1 et T_2 peuvent être choisies de manière qu'il existe maintenant un potentiel.



C. v. Wisselingh del.

Amand Lith Amst



C. v. Wisselingh del. Amand. Lith. Amst.

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

LE CALCUL
DE LA DISTANCE ET DE L'AZIMUT AU MOYEN DE LA LONGITUDE ET DE LA LATITUDE,

PAR

Ch. M. SCHOLS.

A. Enumération des formules.

§ 1. Dans l'ouvrage publié, en 1880, par M. le professeur Helmert, *Die mathematischen und physikalischen Theorieën der höheren Geodäsie*, l'auteur expose l'avantage qu'il y aurait à exécuter la compensation des erreurs, dans un réseau de triangles, suivant la méthode des observations indirectes, en prenant pour inconnues les longitudes et latitudes géographiques.

L'application de cette méthode ramène à chaque pas le problème de déterminer, au moyen des latitudes et de la difference de longitude de deux points, leur distance et leurs azimuts réciproques. Pour ce calcul, M. Helmert renvoie (p. 496) aux solutions du problème en question données aux pages 157 et 313. La première a rapport aux azimuts astronomiques et à la corde, la seconde aux azimuts géodésiques et à la longueur de la ligne géodésique. Aucun des deux systèmes de formules ne

possède la simplicité qui serait nécessaire pour l'emploi fréquent auquel elles sont appelées.

Cette considération m'a engagé à reprendre une étude que j'avais commencée antérieurement sur ce sujet, et je me propose de faire connaître ici quelques-uns des résultats très simples auxquels mes recherches ont conduit. Les formules trouvées sont de telle nature que, pour tous les côtés de triangles susceptibles d'être mesurés, le calcul est aussi facile que si les points étaient situés à la surface d'une sphère. Quand les distances sont plus grandes et que ces formules ne suffisent plus, les corrections à introduire sont si simples, qu'on les trouve, pour ainsi dire, sans calcul.

Les azimuts dont il sera question dans ce qui suit, sont les azimuts dits astronomiques, c'est-à-dire les angles compris entre les sections verticales et les plans méridiens; pour le but que nous avons en vue, l'emploi de ces azimuts est plus commode que celui des azimuts géodésiques.

En premier lieu, je donnerai les formules propres au calcul des azimuts et de la corde, formules applicables jusqu'à des distances égales à la dixième partie du rayon de l'équateur, soit jusqu'à 638 kilomètres. Pour les formules ultérieures, relatives aux azimuts et au calcul direct des longueurs des arcs elliptiques, je devrai m'en tenir provisoirement à des distances assez courtes, mais dans lesquelles, néanmoins, rentrent encore tous les côtés de triangles qui se prêtent à la mesure. Quant aux distances plus grandes, la recherche de la meilleure forme à donner aux formules m'occupe encore en ce moment.

§ 2. Imaginons d'abord que la surface terrestre soit sphérique, et prenons-y deux points A_1 et A_2, avec les latitudes géographiques φ_1 et φ_2 et la différence de longitude λ; la convergence des méridiens α', l'azimut moyen A'_m et la longueur de la corde K' sont alors donnés par les formules connues

$$tg\, \tfrac{1}{2}\, \alpha' = sin\, \tfrac{1}{2}\, \lambda\, sin\, \varphi_m\, sec\, \tfrac{1}{2}\, \lambda\, sec\, \tfrac{1}{2}\, \beta \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$K'\, sin\, A'_m = 2\, R'\, sin\, \tfrac{1}{2}\, \lambda\, cos\, \varphi_m \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$K'\, cos\, A'_m = 2\, R'\, sin\, \tfrac{1}{2}\, \beta\, cos\, \tfrac{1}{2}\, \lambda, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

où $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$ représente la latitude moyenne, $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ la différence de latitude et R' le rayon de la sphère.

Si pour A_2 on prend toujours le point qui a la latitude la plus grande, β est constamment positif, et si l'on donne aussi toujours le signe positif à λ, on obtient l'avantage que α' et A'_m sont toujours positifs et moindres que 90° tant qu'on reste sur le même hémisphère, de sorte qu'il devient impossible de se tromper quant aux signes. Seulement après que le calcul est achevé, on doit faire attention aux signes pour déduire de A'_m et α' les azimuts demandés.

Supposons, pour fixer les idées, que les points soient situés sur l'hémisphère nord et qu'on compte les azimuts à partir du nord, en allant vers l'est, on aura:

1° lorsque le point A_2, *le plus élevé en latitude*, est le plus *oriental* (Pl. 3, fig. 1):

$$\text{Azimut } A_1 A_2 = A'_m - \tfrac{1}{2}\alpha' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
$$\text{» } \quad A_2 A_1 = 180° + A'_m + \tfrac{1}{2}\alpha' \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

2° lorsque le point A_2, *le plus élevé en latitude*, est le plus *occidental* (Pl. 3, fig. 2):

$$\text{Azimut } A_1 A_2 = 360° - A'_m + \tfrac{1}{2}\alpha' \quad \ldots\ldots \quad (6)$$
$$\text{» } \quad A_2 A_1 = 180° - A'_m - \tfrac{1}{2}\alpha' \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

§ 3. Prenons maintenant la Terre ellipsoïdale et exprimons les quantités correspondant à cette forme par les mêmes lettres que ci-dessus, mais sans accents.

Pour la convergence des méridiens, on peut continuer à la calculer par la formule (1) relative à la sphère; même quand il s'agit de distances égales au dixième du rayon de l'équateur, l'erreur sur $\frac{1}{2}\alpha$ n'est encore que de 0",00015 (règle de Dalby, voir Helmert, p. 150). Pour l'azimut moyen et pour la corde, il en est autrement; on peut toutefois, pour des distances jusqu'à 100000 mètres, avec un degré d'exactitude égal à celui qui est généralement atteint dans les calculs par logarithmes à *sept* décimales, appliquer les formules (2) et (3) légèrement

modifiées; il suffit, en effet, de remplacer dans (2) le rayon par la normale N_m pour la latitude moyenne, et dans (3) par le rayon de courbure R_m pour cette même latitude moyenne; on a ainsi:

$$K \sin A_m = 2\, N_m \sin \tfrac{1}{2}\lambda \cos \varphi_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
$$K \cos A_m = 2\, R_m \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

A_m et α étant calculés, les azimuts se trouvent de nouveau au moyen des formules (4) et (5) ou (6) et (7).

Les formules (8) et (9) sont des formules d'approximation; on obtient les formules exactes en multipliant chacune des premières par un facteur qui ne diffère de l'unité que par des quantités du quatrième ordre, l'excentricité étant considérée comme une quantité du premier ordre. [1])

En ce qui concerne les termes dépendant du carré de la distance, ces facteurs sont:

$$1+\tfrac{1}{8}\beta^2 e^2 \frac{1-4\sin^2\varphi_m+2e^2\sin^2\varphi_m+e^2\sin^4\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}-\tfrac{1}{8}\lambda^2\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\cos^6\varphi_m\cos^2 A_m \quad (10)$$

$$1+\tfrac{1}{8}\beta^2 e^2 \frac{1-2\sin^2\varphi_m+4e^2\sin^2\varphi_m-3e^2\sin^4\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}-\tfrac{1}{4}\lambda^2\frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi_m-$$
$$-\tfrac{1}{8}\lambda^2\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\cos^6\varphi_m\cos^2 A_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Si l'on tient compte de ces termes, on trouve pour l'erreur de A_m, calculé par (8) et (9),

$$\left\{\tfrac{1}{4}\beta^2 e^2 \frac{1+e^2-2e^2\sin^2\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}\sin^2\varphi_m-\tfrac{1}{4}\lambda^2\frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi_m\right\}\sin A_m\cos A_m . \quad (12)$$

---

[1]) Dans un article sur l'ouvrage ci-dessus cité de M. Helmert, article publié dans le *Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft*, Heft 3, 1881, et repoduit par le *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1881, p. 359, il est dit par méprise que M. Helmert considère e^2 comme quantité du premier ordre. De même que ce savant, je prends e pour grandeur du premier ordre, ce qui, lorsqu'il s'agit de grandes distances, convient le mieux.

et en remplaçant λ et β par leurs valeurs en K, savoir

$$\lambda \cos \varphi_m = \frac{K}{N_m} \sin A_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\beta = \frac{K}{R_m} \cos A_m = \frac{K}{N_m} \cos A_m \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi_m}{1 - e^2}, \quad \ldots (14)$$

l'expression de l'erreur devient:

$$\frac{1}{4} \frac{e^2}{(1 - e^2)^2} \frac{K^2}{N_m^2} \Big[(1 + e^2 - 2 e^2 \sin^2 \varphi_m) \sin^2 \varphi_m \cos^2 A_m -$$

$$- (1 - e^2) \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m \Big] \sin A_m \cos A_m \quad \ldots\ldots (15)$$

Cette expression s'annule pour $A_m = 0$, pour $A_m = 90°$ et pour A_m égal à environ φ_m, valeurs entre lesquelles se trouvent un maximum positif et un maximum négatif. Elle acquiert les plus grandes valeurs possibles pour $\varphi_m = 0$, $A_m = 60°$, et pour $\varphi_m = 90°$, $A_m = 30°$, à savoir

$$-\frac{3\sqrt{3}}{64} \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{K^2}{a^2} \qquad \text{et} \qquad + \frac{3\sqrt{3}}{64} e^2 \frac{K^2}{a^2}.$$

Si nous prenons $K = 100000$ mètres, ces valeurs maxima deviennent respectivement

$$- 0'',0277 \text{ et } + 0'',0275.$$

Dans le calcul par logarithmes, on trouve A_m au moyen du *log tg*; une erreur dans celui-ci exerce sur la valeur exacte de l'angle l'influence la plus grande lorsque l'angle est de 45°; dans ce cas, une erreur d'une unité sur la septième décimale du logarithme donne pour l'angle une erreur de

$$0'',0237,$$

et l'on voit par conséquent que la valeur maximum ci-dessus assignée à l'erreur de l'angle, calculé par (8) et (9), correspond à une erreur d'un peu plus d'une unité sur la septième décimale du logarithme.

De (10) et (11) on déduit encore, pour l'erreur de K,

$$K\left[\tfrac{1}{8}\lambda^2\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\cos^6\varphi_m\cos^2 A_m+\tfrac{1}{4}\lambda^2\frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi_m\cos^2 A_m-\right.$$

$$-\tfrac{1}{8}\beta^2 e^2\frac{1-4\sin^2\varphi_m+2e^2\sin^2\varphi_m+e^2\sin^4\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}\sin^2 A_m-$$

$$\left.-\tfrac{1}{8}\beta^2 e^2\frac{1-2\sin^2\varphi_m+4e^2\sin^2\varphi_m-3e^2\sin^4\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}\cos^2 A_m\right]=\tfrac{1}{8}\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\frac{K^2}{N_m^2}$$

$$\left[(1+2\sin^2\varphi_m)(1-e^2)\cos^2 A_m-(2-e^2+2e^2\sin^2\varphi_m-3e^2\sin^4\varphi_m)\cos^4 A_m\right].\quad(16)$$

La dérivée de cette expression, par rapport à A_m, devient nulle pour $A_m=0$, pour $A_m=90°$ et pour la valeur de A_m déterminée par l'équation

$$\cos^2 A_m=\frac{(1+2\sin^2\varphi_m)(1-e^2)}{2(2-e^2+2e^2\sin^2\varphi_m-3e^2\sin^4\varphi_m)}\ .\ .\ .\quad(17)$$

Pour $A_m=90°$, l'expression (16) devient toujours nulle; pour $A_m=0$, elle devient:

$$-\tfrac{1}{8}\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\frac{K^3}{N_m^2}(1-2\sin^2\varphi_m+4e^2\sin^2\varphi_m-3e^2\sin^4\varphi_m)$$

et pour A_m donné par la formule (17):

$$\tfrac{1}{32}e^2\frac{K^3}{N_m^2}\frac{(1+2\sin^2\varphi_m)^2}{2-e^2+2e^2\sin^2\varphi_m-3e^2\sin^4\varphi_m}.$$

Ces deux expressions acquièrent leurs valeurs extrêmes pour $\varphi_m = 0$ et $\varphi_m = 90°$, savoir

$$-\tfrac{1}{8}\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\frac{K^3}{a^2}, \quad +\tfrac{1}{8}e^2\frac{K^3}{a^2}, \quad \tfrac{1}{32}\frac{e^2}{2-e^2}\frac{K^3}{a^2} \text{ et } \tfrac{9}{64}e^2\frac{K^3}{a^2};$$

la dernière de ces quantités est la plus grande, de sorte que l'erreur maximum, que l'emploi des formules (8) et (9) peut donner pour la corde, est exprimée par

$$\frac{9}{64}e^2\frac{K^3}{a^2},$$

valeur qui pour $K = 100000$ mètres est égale à 23 millimètres, correspondant tout juste à une unité de la 7[e] décimale du logarithme.

On voit donc que les erreurs commises sur A_m et K, lorsqu'on calcule ceux-ci à l'aide des formules (8) et (9), n'atteignent, jusqu'à des distances de *cent mille* mètres, qu'une valeur à peu près égale à la faute qui peut résulter de l'emploi de logarithmes à 7 décimales. Ces erreurs restent aussi notablement au-dessous de celles qui sont à craindre dans les mesures, de sorte que les formules peuvent être appliquées avec sécurité à tous les côtés de triangles mesurables, sauf à quelques côtés excessivement longs, qui ne se présentent que très rarement.

Les valeurs maxima des erreurs, telles que nous venons de les trouver, ont lieu pour les latitudes $\varphi_m = 0$ et $\varphi_m = 90°$; pour d'autres latitudes, ces erreurs peuvent être encore beaucoup moindres. C'est ce que montre le tableau suivant, qui donne l'erreur maximum, calculée d'après (15) et (16), pour une distance de 100000 mètres, à des latitudes différentes, de 5 en 5 degrés.

φ_m	Erreur maximum de	
	A_m	K
	secondes.	millimètres.
0°	0,028	21
5°	0,027	20
10°	0,026	19
15°	0,025	18
20°	0,023	16
25°	0,021	13
30°	0,019	10
35°	0,016	7
40°	0,013	9
45°	0,011	10
50°	0,013	12
55°	0,016	14
60°	0,019	16
65°	0,021	18
70°	0,023	20
75°	0,025	21
80°	0,026	22
85°	0,027	23
90°	0,028	23

§ 4. Si l'on veut atteindre un plus haut degré d'exactitude dans le cas des distances ci-dessus considérées, ou bien exécuter le calcul pour des distances plus grandes, il faut tenir compte des termes négligés. On y parvient le plus facilement en appliquant, dans le calcul, certaines corrections aux logarithmes; les formules peuvent alors être écrites ainsi:

$$K \sin A_m = 2 N_m \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m . q_1 \ldots\ldots\ldots (18)$$

$$K \cos A_m = 2 R_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda . q_2 , \ldots\ldots\ldots (19)$$

où l'on a, à des quantités du 6e ordre près,

$$\log q_1 = -[1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \sin^2 \varphi_m + \tfrac{1}{2} [1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos 2 \varphi_m \ldots (20)$$

$$\log q_2 = -[1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda \cos^4 \varphi_m + \tfrac{1}{2} [1] \sin^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos 2 \varphi_m \ldots (21)$$

$$[1] = M \frac{e^2}{1-e^2} 10^7 \quad \log [1] = 4{,}465 \quad \log \tfrac{1}{2} [1] = 4{,}164.$$

La constante [1], qui entre dans ces expressions, est déterminée de manière que les corrections se trouvent en parties de la 7e décimale, prise pour unité.

Lorsqu'il s'agit seulement de l'azimut, non de la longueur de la corde, les deux termes contenant $\cos 2\varphi_m$ peuvent être supprimés, ces termes n'ayant pas d'influence sur l'azimut.

Pour des distances encore plus grandes, allant jusqu'au dixième du rayon de l'équateur, ou 638 kilomètres, on peut encore très facilement tenir compte des termes du 6e ordre. Il convient alors de partager les termes de correction en deux groupes, l'un comprenant les termes qui influent sur l'azimut, l'autre formé des termes qui n'ont d'influence que sur la longueur de la corde. Ces derniers termes ne sont introduits qu'après qu'on a calculé l'azimut; il est surtout nécessaire de procéder ainsi, parce que l'un de ces termes dépend directement de l'azimut et peut donc difficilement être calculé d'avance.

Le mieux est, dans ce cas, d'écrire les formules de la manière suivante:

$$K_0 \sin A_m = 2 N_m \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m . q_1 \ldots\ldots\ldots (22)$$

$$K_0 \cos A_m = 2 N_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda . q_2 \ldots\ldots\ldots (23)$$

$$K = K_0 \, q_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

où:

$$log\, q_1 = - [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \varphi_m - [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, cos^2 \tfrac{1}{2}\lambda -$$
$$- [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2 \varphi_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

$$log\, q_2 = - [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^4 \varphi_m - [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^4 \varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2 \varphi_m +$$
$$+ [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \varphi_m\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^2 \varphi_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

$$log\, q_3 = + \tfrac{1}{2}[1]\, \frac{R_m}{N_m}\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, cos\, 2\varphi_m + [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \varphi_m\, [2]\, cos^2 \varphi_m -$$
$$- [1]\, sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda\, cos^4 \varphi_m\, [3]\, cos^2 \varphi_m\, cos^2 A_m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Si les corrections sont exprimées en parties de la 10e décimale, prise pour unité, les constantes ont les valeurs suivantes:

$$[1] = M \frac{e^2}{1-e^2}\, 10^{10} \qquad log\, [1] = 7{,}46510 \qquad log\, \tfrac{1}{2}[1] = 7{,}16407$$

$$[2] = \tfrac{5}{2}\, e^2 \qquad log\, [2] = 8{,}222 - 10$$

$$[3] = \tfrac{1}{2}\, \frac{e^2}{1-e^2} \qquad log\, [3] = 7{,}526 - 10$$

Les termes du 8e ordre, négligés dans ces dernières formules, sont si petits que, pour une distance de 638 kilomètres, ils ne peuvent avoir d'influence que sur la 11e décimale du logarithme; pris tous ensemble, ils arriveront peut-être à rendre la 10e décimale fautive de une ou deux unités, de sorte que, pour la distance extrême en question, les azimuts s'obtiennent encore exactement jusque avec 4 décimales à la seconde, tandis que dans la longueur de la corde il peut se glisser tout au plus une erreur de $\frac{1}{2}$ millimètre.

Les termes de correction (20), (21), (25), (26) et (27), bien que paraissant un peu compliqués, ne le sont pas pour le calcul, attendu qu'ils nécessitent seulement la recherche de $log\, cos\, 2\varphi_m$, toutes les autres quantités ayant déjà été cherchées à l'occasion du calcul principal, qui est entièrement conforme au calcul sphérique.

C'est ce que mettront en pleine évidence les exemples suivants, où les quantités empruntées à la partie antérieure du calcul sont indiquées par de petites lettres.

§ 5. Comme spécimen de la marche à suivre, nous prendrons les deux exemples traités dans l'ouvrage de M. Helmert, et en premier lieu celui qui se trouve aux pages 164—166. La longueur de la corde y est d'environ 120000 mètres, de sorte que les erreurs résultant du calcul d'après (8) et (9) peuvent dépasser celles qui ont été trouvées ci-dessus, dans le rapport de 1 : $1{,}2^2 = 1{,}44$ pour l'azimut et dans le rapport de 1 : $1{,}2^3 = 1{,}728$ pour la corde. Nous donnons d'abord le calcul suivant les formules (1), (8) et (9), c'est-à-dire sans aucune correction, et nous faisons ce calcul avec 8 décimales, parce que, en se bornant à sept chiffres décimaux, les erreurs de la formule seraient masquées par celles des logarithmes.

$$\varphi_2 = 57^\circ \qquad \lambda = 1^\circ 22' 6'',03270$$
$$\varphi_1 = 56^\circ 13' 49'',02186 \qquad \tfrac{1}{2}\lambda = 41' 3'',01635$$
$$\varphi_m = 56^\circ 36' 54'',51093 \qquad \tfrac{1}{2}\beta = 23' 5'',48907$$

$\log \sin \frac{1}{2}\lambda$	=	8,0770318.4
$\log \sin \varphi_m$	=	9,9216830.0
$\log \sec \frac{1}{2}\lambda$	=	309.6
$\log \sec \frac{1}{2}\beta$	=	98.0
$\log tg \frac{1}{2}\alpha$	=	7,9987556.0
$\frac{1}{2}\alpha$	=	34′16″,678
$\log 2$	=	0,3010300.0
$\log N_m$	=	6,8056563.1
$\log \sin \frac{1}{2}\lambda$	=	8,0770318.4
$\log \cos \varphi_m$	=	9,7405680.1
$\log K \sin A_m$	=	4,9242861.6
$\log \sin A_m$	=	9,8451112.1
$\log K$	=	5,0791749.5

$\log 2$	$=$	0,3010300.0
$\log R_m$	$=$	6,8047736.4
$\log \sin \frac{1}{2} \beta$	$=$	7,8271747.0
$\log \cos \frac{1}{2} \lambda$	$=$	9,9999690.4
$\log K \cos A_m$	$=$	4,9329473.8
$\log \cos A_m$	$=$	9,8537724.3
$\log K$	$=$	5,0791749.5
$\log K \sin A_m$	$=$	4,9242861.6
$\log K \cos A_m$	$=$	4,9329473.8
$\log tg A_m$	$=$	9,9913387.8
A_m	$=$	44°25′43″,348
$\frac{1}{2} \alpha$	$=$	34′16″,678
$180° - A_m - \frac{1}{2} \alpha$	$=$	134°59′59″,974
$360° - A_m + \frac{1}{2} \alpha$	$=$	316° 8′33″,330
K	$=$	119998,262

M. Helmert, en calculant cet exemple, a trouvé pour les azimuts:

314°59′59″,988
136° 8′33″,344

et pour la corde:

$$\log K = 5,0791748.5$$

ou $K = 119998,234$ mètres.

Les formules (8) et (9) donnent donc ici dans l'azimut une erreur de 0″,014 et dans la corde une erreur d'une unité de la septième décimale, ou 28 millimètres.

Voici maintenant le même exemple calculé en tenant compte aussi des termes du quatrième ordre:

$\varphi_2 = 57°$	$\lambda = 1°22'6'',03270$
$\varphi_1 = 56°13'49'',02186$	$\frac{1}{2}\lambda = 41'3'',01635$
$\varphi_m = 56°36'54'',51093$	$\frac{1}{2}\beta = 23'5'',48907$

$\log \sin \frac{1}{2}\lambda$	$=$ 8,0770318.4	
$\log \sin \varphi_m$	$=$ 9,9216830.0	$= a$
$\log \sec \frac{1}{2}\lambda$	$=$ 309.6	
$\log \sec \frac{1}{2}\beta$	$=$ 98.0	
$\log tg \frac{1}{2}\alpha$	$=$ 7,9987556.0	
$\frac{1}{2}\alpha$	$=$ 34′16″,678	

$\log 2$	$=$ 0,3010300.0		$\log [1]$	$=$ 4,465
$\log N_m$	$=$ 6,8056563.1		$2d$	$=$ 5,654
$\log \sin \frac{1}{2}\lambda$	$=$ 8,0770318.4	$= b$	$2a$	$=$ 9,843
$\log \cos \varphi_m$	$=$ 9,7405680.1	$= c$	$\log c_1$	$=$ 9,962
$- c_1$	$=$ — 92			
$+ c_2$	$=$ — 26			
$\log K \sin A_m$	$=$ 4,9242860.4		$\log \frac{1}{2} [1]$	$=$ 4,164
$\log \sin A_m$	$=$ 9,8451111.8		$2d$	$=$ 5,654
$\log K$	$=$ 5,0791748.6		$\log \cos 2\varphi_m$	$=$ $9,596_n$
$\log 2$	$=$ 0,3010300.0		$\log c_2$	$=$ $9,414_n$
$\log R_m$	$=$ 6,8047736.4			
$\log \sin \frac{1}{2}\beta$	$=$ 7,8271747.0	$= d$	$\log [1]$	$=$ 4,465
$\log \cos \frac{1}{2}\lambda$	$=$ 9,9999690.4		$2b$	$=$ 6,154
$- c_3$	$=$ — 38		$4c$	$=$ 8,962
$+ c_2$	$=$ — 26		$\log c_3$	$=$ 9,581
$\log K \cos A_m$	$=$ 4,9329473.2			
$\log \cos A_m$	$=$ 9,8537724.6			
$\log K$	$=$ 5,0791748.6			

$\log K \sin A_m$	$=$ 4,9242860.4
$\log K \cos A_m$	$=$ 4,9329473.2
$\log tg A_m$	$=$ 9,9913387.2
A_m	$=$ 44°25′43″,333
$\frac{1}{2}\alpha$	$=$ 34′16″,678
$180° - A_m - \frac{1}{2}\alpha$	$=$ 134°59′59″,989
$360° - A_m + \frac{1}{2}\alpha$	$=$ 316° 8′33″,345
K	$=$ 119998,237

La différence entre ces résultats et ceux de M. Helmert n'est que de 0",001 pour l'azimut et de 3 millimètres pour la corde. L'accord est aussi parfait qu'il soit possible de l'obtenir en faisant usage de logarithmes à huit décimales; car dans *log K* il n'y a qu'une différence d'une unité de la 8e décimale, et si l'on augmente d'une de ces mêmes unités le $log\ tg\ A_m$, on trouve, dans l'azimut, également un écart de 0",001, mais en sens opposé.

Développons maintenant le premier exemple de M. Helmert (p. 158—164), en tenant compte des termes du sixième ordre et en calculant avec 10 décimales.

Königsbergen	$\varphi_2 = 54°42'50'',6$	$\lambda = 7°\ 6'\ 0''$	
Berlin	$\varphi_1 = 52°30'16'',7$	$\frac{1}{2}\lambda = 3°33'\ 0''$	
	$\varphi_m = 53°36'33'',65$	$\frac{1}{2}\beta = 1°\ 6'16'',95$	

$log\ sin\ \frac{1}{2}\lambda$	=	8,7918278131		
$log\ sin\ \varphi_m$	=	9,9057908074	$= a$	
$log\ sec\ \frac{1}{2}\lambda$	=	8341494		
$log\ sec\ \frac{1}{2}\beta$	=	807294		
$log\ tg\ \frac{1}{2}\alpha$	=	8,6985334993		
$\frac{1}{2}\alpha$	=	2°51'34",32410		

$log\ sin\ \frac{1}{2}\lambda$	=	8,7918278131		$log\,[1]$	=	7,46510
$log\ cos\ \varphi_m$	=	9,7732652484	$= b$	$2\,e$	=	6,57020
		8,5650930615	$= c$	$2\,a$	=	9,81158
$log\ N_m$	=	6,8055846752	$= d$	$log\ c_1$	=	3,84688
$log\ 2$	=	0,3010299957		$2\,f$	=	6,569
$-c_1$	=	—7028.8		$2\,c$	=	7,130
$-c_2$	=	—2.6		$log\ c_2$	=	0,416
$-c_3$	=	—9.5		$log\ c_3$	=	0,977
$log\ K_0\ sin\ A_m$	=	5,6717070283				
$log\ sin\ A_m$	=	9,9475723000				
$log\ K_0$	=	5,7241347283				

$\log \sin \frac{1}{2} \beta$	$= 8{,}2850980893$	$= e$
$\log \cos \frac{1}{2} \lambda$	$= 9{,}9991658506$	
	$8{,}2842639399$	$= f$
$\log R_m$	$= 6{,}8045587386$	$= g$
$\log 2$	$= 0{,}3010299957$	
$- c_4$	$= -13861.8$	
$- c_5$	$= -18.7$	
$+ c_3$	$= +9.5$	
$\log K_0 \cos A_m$	$= 5{,}3898512871$	
$\log \cos A_m$	$= 9{,}6657165588$	$= h$
$\log K_0$	$= 5{,}7241347283$	
$+ c_6$	$= -1601.6$	
$+ c_7$	$= +41.3$	
$- c_8$	$= -3.5$	
$\log K$	$= 5{,}7241345719$	

$\log [1]$	$= 7{,}46510$
$2c$	$= 7{,}13019$
$2b$	$= 9{,}54653$
$\log c_4$	$= 4{,}14182$
$2c$	$= 7{,}130$
$\log c_5$	$= 1{,}272$
$\log \frac{1}{2} [1]$	$= 7{,}16407$
$2e$	$= 6{,}57020$
$\log \cos 2\varphi_m$	$= 9{,}47132_n$
$g-d$	$= -103$
$\log c_6$	$= 3{,}20456_n$
$\log [2]$	$= 8{,}222$
$\log c_1$	$= 3{,}847$
$2b$	$= 9{,}547$
$\log c_7$	$= 1{,}616$
$\log [3]$	$= 7{,}526$
$\log c_4$	$= 4{,}142$
$2b$	$= 9{,}547$
$2h$	$= 9{,}331$
$\log c_8$	$= 0{,}546$

$$\log K_0 \sin A_m = 5{,}6717070283$$
$$\log K_0 \cos A_m = 5{,}3898512871$$
$$\log tg\, A_m = 0{,}2818557412$$

$$A_m = 62°24'35'',25647$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 2°51'34'',32410$$

$A_m - \frac{1}{2}\alpha = 59°33'\ 0'',9324$ Azimut Berlin-Königsbergen.

$180° + A_m + \frac{1}{2}\alpha = 245°16'\ 9'',5806$ Azimut Königsbergen-Berlin.

$K = 529827{,}593$ Corde Königsbergen-Berlin.

Les résultats que nous venons de trouver s'accordent entièrement avec ceux du premier calcul de M. Helmert (p. 158—162). Le logarithme de la corde présente, il est vrai, une différence de 6 unités de la dernière décimale (M. Helmert trouve pour les trois derniers chiffres 725), mais cette différence n'influe que sur les *fractions de millimètre.* Poussé jusque-là, notre calcul donne ... 592,54 mm., celui de M. Helmert ... 593,27 mm., donc une différence de 0,73 millimètre.

Je ne puis dire, en ce moment, à quoi cette différence doit être attribuée, aux termes d'ordre supérieur qui ont été négligés, ou bien aux erreurs du *Thesaurus logarithmorum completus* de Vega (voir Bremiker, *Logarithmentafel von* Vega *mit* 7 *Decimalen*, *Vorwort*, p. VIII, et Helmert, note à la p. 41); pratiquement, ce point est du reste de peu d'importance pour les distances dont il s'agit ici.

M. Helmert donne encore un second calcul des azimuts, dont le résultat diffère du premier, et par conséquent aussi du nôtre, de 0",0001; dans ce calcul, toutefois, les termes du sixième ordre, qui fortuitement se compensent (p. 162), sont négligés.

Cette compensation accidentelle des termes du sixième ordre se produit aussi dans notre calcul; en omettant ces termes, nous trouvons pour la fraction de seconde de A_m . .",25653, d'où se déduisent exactement les mêmes valeurs pour les azimuts; mais, en règle générale, on ne peut compter sur une pareille compensation.

Pour la corde, M. Helmert présente encore deux autres calculs, qui, comparés au premier, donnent une différence de deux unités de la dixième décimale, l'un dans le sens positif, l'autre dans le sens négatif; entre ces deux résultats et le nôtre, il y a donc un écart de 4 et 8 unités de la dixième décimale, ou de 0,48 et 0,97 millimètre.

Dans ces deux derniers calculs, il est tenu compte séparément des termes du sixième ordre, dont l'influence est encore respectivement de 44 et de 41 unités de la 10_e décimale, ou de 5,4 et 5,0 millimètres.

Si dans notre calcul nous négligeons entièrement les termes du sixième ordre, nous trouvons dans le logarithme une différence de 25 unités de la 10e décimale, correspondant à 3,0 millimètres.

Quand on veut comparer notre procédé de calcul avec celui de M. Helmert, il faut bien remarquer que M. Helmert n'a pas donné, comme nous l'avons fait ci-dessus, tous les détails du calcul; pour beaucoup de termes de correction d'ordre supérieur, dont la recherche est parfois laborieuse, il ne donne que le résultat. Une comparaison équitable exige que le calcul soit écrit d'une manière complète; alors seulement on peut apprécier pleinement la différence. Il suffira toutefois d'un examen superficiel pour reconnaître que le calcul sphérique préalable de M. Helmert est, aux deux quantités N_m et R_m près, entièrement analogue à notre calcul principal, et que dans notre méthode tous les termes de correction se trouvent très facilement, sans l'intervention d'aucune des nombreuses quantités auxiliaires dont M. Helmert fait usage, même quand il s'agit de petites distances.

§ 6. Passons maintenant au calcul des azimuts et de la distance des points mesurée suivant la surface terrestre. Il n'y a pas à revenir ici sur le calcul de la convergence des méridiens, lequel peut toujours s'exécuter d'après la formule (1).

En supposant de nouveau la Terre sphérique, et représentant la distance des points en mesure linéaire par S', en mesure angulaire par s', on a:

$$\sin \tfrac{1}{2} s' \sin A'_m = \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \quad \ldots \ldots \ldots (28)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} s' \cos A'_m = \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \quad \ldots \ldots \ldots (29)$$

$$S' = R' s' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (30)$$

Revenant ensuite à l'ellipsoïde, on peut, pour les côtés de

tout triangle mesurable, poser, avec une exactitude égale à celle qu'on obtient dans un calcul par logarithmes à 7 décimales,

$$sin\,\tfrac{1}{2}\,s\,sin\,A_m = \frac{N_m}{R}\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\,cos\,\varphi_m \;\ldots\ldots\; (31)$$

$$sin\,\tfrac{1}{2}\,s\,cos\,A_m = \frac{R_m}{R}\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,cos\,\tfrac{1}{2}\,\lambda \;\ldots\ldots\; (32)$$

$$S = R\,s \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (33)$$

expressions ou R est une fonction de φ_m, dont on peut disposer à volonté et qu'on choisira de façon à simplifier le calcul et à rendre l'erreur de S aussi petite que possible.

L'erreur de S dépend de la valeur qu'on donne à R. En tant qu'elle dépend des termes de la troisième puissance de la distance, cette erreur est exprimée par

$$S\Big[\tfrac{1}{4}\lambda^2\frac{e^2}{1-e^2}cos^4\varphi_m cos^2 A_m - \tfrac{1}{8}\beta^2 e^2 \frac{1-4sin^2\varphi_m+2e^2sin^2\varphi_m+e^2sin^4\varphi_m}{(1-e^2sin^2\varphi_m)^2}sin^2 A_m -$$

$$-\tfrac{1}{8}\beta^2 e^2 \frac{1-2\,sin^2\,\varphi_m+4\,e^2 sin^2\,\varphi_m-3\,e^2\,sin^4\,\varphi_m}{(1-e^2\,sin^2\,\varphi_m)^2}cos^2\,A_m +$$

$$+\tfrac{1}{6}\lambda^2\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 cos^6\,\varphi\,cos^2\,A_m + \tfrac{1}{24}\beta^2\left(\frac{R_m^2}{R^2}-1\right)+\tfrac{1}{24}\lambda^2 cos^2\varphi_m\left(\frac{N_m^2}{R^2}-1\right)\Big] =$$

$$= \tfrac{1}{24}\frac{e^2}{(1-e^2)^2}\frac{S^3}{N_m^2}\Big[\frac{(1-e^2)^2}{e^2}\left(\frac{N_m^2}{R^2}-1\right)+$$

$$+(1+8sin^2\varphi_m)(1-e^2)cos^2 A_m-(6-2e^2+4e^2sin^2\varphi_m-8e^2sin^4\varphi_m)cos^4 A_m\Big]. (34)$$

Comme la fonction arbitraire R n'entre pas dans la partie périodique de l'erreur, la valeur maximum de l'erreur ne peut être abaissée, par le choix de cette fonction, que jusqu'à la moitié de l'amplitude de la partie variable. Cette valeur, expri-

mée en millimètres, est donnée, pour $S = 100000$ mètres, dans la deuxième colonne du tableau qu'on trouvera plus loin.

Les valeurs de R les plus faciles pour le calcul sont: $R = R_m$ et $R = N_m$; les colonnes 3 et 4 du tableau contiennent les erreurs maxima qui restent alors dans S pour une distance de 100000 mètres. On voit que pour les latitudes au-dessous de 35° à 40° la valeur $R = R_m$ est la plus avantageuse, pour les latitudes au-dessus, la valeur $R = N_m$.

On pourrait employer aussi le rayon moyen $\sqrt{R_m N_m}$, mais celui-ci ne donne un très léger bénéfice, comparativement aux deux valeurs précédentes, que pour les latitudes de 35° à 40°.

Adopter pour R une valeur constante n'offre un certain avantage que pour les grandes latitudes; la valeur $\frac{a}{1-e^2}$ est alors à recommander, comme le montre la colonne 5 du tableau.

Si l'on voulait réduire partout les erreurs maxima au minimum de la colonne 2, il faudrait pour chaque latitude donner à R une valeur différente, ou choisir pour cette quantité une fonction compliquée de φ_m, ce qui n'est pas à conseiller: d'une part, parce que l'erreur maximum ne peut être que peu diminuée de cette manière, d'autre part, parce qu'il est impossible d'augmenter ainsi l'exactitude de A_m. On fait alors beaucoup mieux d'introduire dans le calcul quelques termes de correction, ce qui permet de trouver les valeurs de A_m et de S, simultanément, avec une précision bien plus grande.

Il ressort toutefois des chiffres contenus dans le tableau suivant, que pour les valeurs de R auxquelles il se rapporte, c'est-à-dire pour R_m, N_m et $\frac{a}{1-e^2}$, on atteint, même quand les distances vont jusqu'à 100000 mètres, une exactitude équivalente à celle qui résulte de l'emploi de logarithmes à 7 décimales.

φ_m	Demi-amplitude de l'erreur.	Erreur maximum pour:		
		$R = R_m$	$R = N_m$	$R = \frac{a}{1-e^2}$
	millimètres.	millimètres.	millimètres.	millimètres.
0°	17	**21**	35	48
5°	17	**20**	34	48
10°	17	**19**	33	46
15°	16	**18**	31	44
20°	15	**16**	28	41
25°	13	**13**	25	37
30°	12	**13**	21	33
35°	10	**13**	16	28
40°	9	13	**12**	23
45°	7	14	**7**	17
50°	6	15	**9**	12
55°	6	16	**12**	**9**
60°	7	18	**14**	**9**
65°	8	19	**17**	**8**
70°	9	20	**19**	**11**
75°	10	22	**21**	**13**
80°	11	23	**22**	**15**
85°	12	23	**23**	**16**
90°	12	23	**23**	**16**

§ 7. Lorsque, pour les distances considérées dans ce qui précède, on veut obtenir un plus haut degré d'exactitude, ou lorsqu'on se propose d'appliquer le calcul à des distances plus grandes, on doit tenir compte des termes de correction négligés jusqu'ici. Remettant à plus tard la recherche de la meilleure forme à donner dans ce cas aux équations, nous nous conten-

terons maintenant d'introduire ces corrections sous une autre forme, qui convient parfaitement quand les distances ne sont pas d'une longueur démesurée.

Pour résoudre ce problème, aussi quand il s'agit d'une surface sphérique, il est avantageux, lorsque les distances ne sont pas excessives, de développer les formules en séries, de façon qu'on n'ait pas à faire entrer dans le calcul les sinus des petits angles, mais ces angles eux-mêmes, exprimés en secondes.

Dans l'hypothèse de la sphéricité de la surface terrestre, on peut alors écrire:

$$log\ \alpha' = log\ (\lambda\ sin\ \varphi_m\ sec\ \tfrac{1}{2}\ \beta) + [1]\ \lambda^2\ cos^2\ \varphi_m \ldots\ldots \quad (35)$$

$$log\ (S'\ sin\ A'_m) = log\ (R' arc\ 1''\lambda\ cos\ \varphi_m) - [2]\ \lambda^2\ sin^2\ \varphi_m + [3]\ \beta^2. \quad (36)$$

$$log\ (S'\ cos\ A'_m) = log\ (R' arc\ 1''\beta\ cos\ \tfrac{1}{2}\ \lambda) + [4]\ \lambda^2\ cos^2\ \varphi_m, \ldots \quad (37)$$

où α', β et λ sont évalués en secondes, et où les constantes ont les valeurs suivantes, les corrections étant exprimées en parties de la 7e décimale, prise pour unité:

$$[1] = \frac{M}{12}\ arc^2\ 1'' \qquad log\ [1] = 4{,}92975 - 10.$$

$$[2] = [3] = [4] = \frac{M}{24}\ arc^2\ 1'' \qquad log\ [2] = 4{,}62872 - 10.$$

Quand on applique ce même développement aux formules (31)—(33), on n'a qu'à remplacer dans (36) et (37) R' par N_m ou par R_m. Dans le calcul sous cette forme, on peut toutefois apporter facilement les corrections de l'ordre $e^2\ s^2$ en employant, au lieu des constantes [3] et [4], une valeur qui varie lentement avec φ_m et dont on dressera d'avance le tableau, et en introduisant un petit terme de correction dépendant de $cos\ 2\ \varphi_m$, le même qui entre aussi dans les formules (20) et (21).

La première opération ne donne donc pas plus d'embarras que dans le calcul sphérique; seul, le dernier terme de correction doit

être calculé à part, mais, pour cela, des logarithmes à trois décimales suffisent. S'il s'agit seulement de calculer l'azimut, non de trouver la valeur entièrement exacte de la distance, on peut même négliger ce terme, attendu qu'il n'a pas d'influence sur l'azimut.

Les formules (36) et (37) peuvent alors être écrites ainsi:

$$\log S \sin A_m = \log(N_m \, arc\, 1'' \lambda \cos\varphi_m) - [2]\lambda^2 \sin^2\varphi_m + [3]\beta^2 + [5]\beta^2 \cos 2\varphi_m \quad (38)$$

$$\log S \cos A_m = \log(R_m \, arc\, 1'' \beta \cos \tfrac{1}{2}\lambda) + [4]\lambda^2 \cos^2\varphi_m + [5]\beta^2 \cos 2\varphi_m \quad \ldots\ldots (39)$$

où

$$\left.\begin{aligned}
&[2] = \frac{M}{24} 10^7 \, arc^2\, 1'' && \log[2] = 4{,}62872 - 10 \ldots \\
&[3] = \frac{M}{24} 10^7 \, arc^2\, 1''\left(1 - 6\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\varphi_m\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[4] = \frac{M}{24} 10^7 \, arc^2\, 1''\left(1 - 6\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[5] = \frac{M}{8} 10^7 \frac{e^2}{1-e^2} arc^2\, 1'' && \log[5] = 2{,}933 - 10 \ldots
\end{aligned}\right\} (40)$$

La formule (35), pour les motifs mentionnés plus haut (voir § 3), peut rester telle qu'elle est [1]).

---

[1]) Pour le calcul de la corde, un développement semblable à celui qui vient d'être donné se recommande moins, parce qu'en fin de compte on a toujours besoin du sinus. L'application des termes de correction n'en deviendrait d'ailleurs pas plus facile, vu que toutes ces corrections, ainsi qu'il ressort immédiatement des formules (18)-(21), devraient être calculées séparément; seulement pour le calcul de u, on pourrait employer avec fruit la formule (35).

Dans le problème que nous traitons ici et où l'on a finalement besoin de l'arc, non du sinus, le développement en série est mieux à sa place. Il ne convient pas de développer $\cos \frac{1}{2}\lambda$ dans les formules (37) et (39), car le calcul n'en serait pas simplifié et l'exactitude de la formule diminuerait notablement. (La valeur maximum de l'erreur de A_m, par exemple, deviendrait 14 fois plus grande).

Pour les valeurs de *log* [3] et de *log* [4] je donne ici un petit tableau s'étendant de $\varphi_m = 30°$ à $\varphi_m = 60°$, qui, à l'aide d'une interpolation facile, suffit à tous les besoins du calcul

φ_m	*log* [3]	*diff.*	*log* [4]	*diff.*	
30°	4,62432		4,61539		60°
31°	4,62405	27	4,61566	27	59°
32°	4,62378	27	4,61594	28	58°
33°	4,62350	28	4,61623	29	57°
34°	4,62321	29	4,61652	29	56°
35°	4,62292	29	4,61681	29	55°
36°	4,62263	29	4,61711	30	54°
37°	4,62233	30	4,61741	30	53°
38°	4,62203	30	4,61771	30	52°
39°	4,62173	30	4,61802	31	51°
40°	4,62143	30	4.61832	30	50°
41°	4,62112	31	4,61863	31	49°
42°	4,62081	31	4,61894	31	48°
43°	4,62050	31	4,61926	32	47°
44°	4.62019	31	4,61957	31	46°
45°	4,61988	31	4,61988	31	45°
	log [4]	*diff.*	*log* [3]	*diff.*	φ_m

Comme application, nous reprendrons le problème déjà traité plus haut, avec la distance de 120000 mètres.

$\varphi_2 = 57°$
$\varphi_1 = 56°13'49'',02186$
$\varphi_m = 56°36'54'',51093$

$\lambda = 1°22'\ 6'',03270 = 4926'',03270$
$\beta = 46'10'',97814 = 2770'',97814$

$log\ \lambda$	$= 3,6924972.9$	$= a$
$log\ sin\ \varphi_m$	$= 9,9216830.0$	$= b$
$log\ sec\ \frac{1}{2}\ \beta$	$=$ 98.0	
c_1	$=$ 62.5	
$log\ \alpha$	$= 3,6141963.4$	
α	$= 4113'',356$	

$log\ N_m arc 1''$	$= 1,4912311.7$	
$log\ \lambda$	$= 3,6924972.9$	
$log\ cos\ \varphi_m$	$= 9,7405680.1$	$= c$
$-\ c_2$	$=$ −71.96	
$+\ c_3$	$=$ +31.74	
$+\ c_5$	$=$ −26	
$log\ S\ sin\ A_m$	$= 4,9242924.2$	
$log\ sin\ A_m$	$= 9,8451111.8$	
$log\ S$	$= 5,0791812.4$	

$log\ R_m\ arc\ 1''$	$= 1,4903485.0$	
$log\ \beta$	$= 3,4426331.0$	$= d$
$log\ cos\ \frac{1}{2}\ \lambda$	$= 9,9999690.4$	
$+\ c_4$	$=$ 30.87	
$+\ c_5$	$=$ −26	
$log\ S\ cos\ A_m$	$= 4,9329537.0$	
$log\ cos\ A_m$	$= 9,8537724.6$	
$log\ S$	$= 5,0791812.4$	

$log\ S\ sin\ A_m$	$= 4,9242924.2$
$log\ S\ cos\ A_m$	$= 4,9329537.0$
$log\ tg\ A_m$	$= 9,9913387.2$

$log\ [1]$	$= 4,9298$
$2\ a$	$= 7,3850$
$2\ c$	$= 9,4811$
$log\ c_1$	$= 1,7959$

$log\ [2]$	$= 4,6287$
$2\ a$	$= 7,3850$
$2\ b$	$= 9,8434$
$log\ c_2$	$= 1,8571$

$log\ [3]$	$= 4,6163$
$2\ d$	$= 6,8853$
$log\ c_3$	$= 1,5016$

$log\ [5]$	$= 2,933$
$2\ d$	$= 6,885$
$log\ cos\ 2\ \varphi_m$	$= 9,596_n$
$log\ c_5$	$= 9,414_n$

$log\ [4]$	$= 4,6234$
$2\ a$	$= 7,3850$
$2\ c$	$= 9,4811$
$log\ c_4$	$= 1,4895$

$$A_m = 44^\circ 25' 43'',333$$
$$\tfrac{1}{2}\,\alpha = 34' 16'',678$$
$$180^\circ - A_m - \tfrac{1}{2}\alpha = 134^\circ 59' 59'',989$$
$$360^\circ - A_m + \tfrac{1}{2}\alpha = 316^\circ\ 8' 33'',345$$
$$S = 119999,997$$

Pour les azimuts, nous trouvons les mêmes valeurs que précédemment; sur la distance S, de 120000 mètres, il y a une différence de 3 millimètres, accord aussi satisfaisant qu'il soit possible de l'obtenir avec des logarithmes à 8 décimales. En appliquant les formules (31) — (33) avec $R = N_m$, c'est-à-dire sans corrections, on trouve pour les azimuts les mêmes valeurs que dans le premier calcul du § 5; pour la distance, $120000^m,022$, ou 22 millimètres de trop.

Les logarithmes de N_m *arc* 1″ et de R_m *arc* 1″, employés dans le calcul ci-dessus, sont tirés des „*Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abtheilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coördinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung*, Berlin, 1878", où l'on trouve, avec huit décimales, les logarithmes des réciproques de ces quantités, pour les latitudes de 47°—57°, croissant chaque fois d'une minute.

§ 8. Pour s'assurer jusqu'à quel point il est permis d'appliquer le développement dont nous venons de faire usage, il suffira de développer les termes en s^4 qui sont indépendants de e^2. On trouve alors que dans les logarithmes de α, de $S\, sin\, A_m$ et de $S\, cos\, A_m$, ont été négligés respectivement les termes suivants de l'ordre s^4:

$$\frac{M}{1440}\left[7\,\lambda^4\, cos^2\varphi_m - 13\,\lambda^4\, sin^2\varphi_m\, cos^2\varphi_m - 30\,\lambda^2\,\beta^2\, sin^2\varphi_m\right]. \quad (41)$$

$$\frac{M}{2880}\left[11(\beta^2+\lambda^2 cos^2\varphi_m)^2-10\lambda^4 cos^2\varphi_m-10\beta^4-30\beta^2\lambda^2-\lambda^4\right]. \quad (42)$$

$$\frac{M}{2880}\left[11(\beta^2+\lambda^2 cos^2\varphi_m)^2-10\lambda^4 cos^2\varphi_m-10\beta^4-30\beta^2\lambda^2-\beta^4\right]. \quad (43)$$

Il en résulte pour l'erreur de $\frac{1}{2}\alpha$: .

$$\frac{1}{2880}\left(\frac{S}{R}\right)^5 \frac{sin\varphi_m}{cos^3\varphi_m}\left[30 sin^2\varphi_m sin^3 A_m-(7+17 sin^2\varphi_m) sin^5 A_m\right], \quad (44)$$

pour l'erreur de A_m:

$$\frac{1}{2880}\left(\frac{S}{R}\right)^4 \left[\frac{sin^5 A_m\, cos\, A_m}{cos^4\varphi_m} - sin\, A_m\, cos^5 A_m\right] \; \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

et pour l'erreur de S:

$$\frac{1}{2880}\frac{S^5}{R^4}\frac{1}{cos^4\varphi_m}\Big[(1-cos^4\varphi_m)\, sin^6 A_m - (20\, cos^2\varphi_m -$$

$$-13\, cos^4\varphi_m)\, sin^4 A_m + (30\, cos^2\varphi_m - 23\, cos^4\varphi_m)\, sin^2 A_m\Big] \; . \; . \quad (46)$$

A l'aide de ces formules, nous avons calculé les deux tableaux suivants, dans lesquels, pour $S=100000$ M et pour $S=200000$ M, sont consignées les valeurs maxima des erreurs de $\frac{1}{2}\alpha$, A_m et S, suivant les formules (35), (36) et (37), respectivement (38) et (39), pour différentes latitudes. Pour les valeurs de φ_m inférieures à celles qui se trouvent dans ces tableaux, les valeurs maxima des erreurs de $\frac{1}{2}\alpha$ et de A_m sont au-dessous de 0″,00005 et celles de S au-dessous de 0,5 millimètre.

$S = 100000$ mètres.

φ_m	Valeurs maxima des erreurs de		
	$\frac{1}{2}\alpha$	A_m	S
70°	0″,0000	0″,0001	0 mm.
75°	0″,0000	0″,0002	1 »
80°	0″,0001	0″,0012	3 »
85°	0″,0008	0″,0194	39 »
90°	—	—	—

$S = 200000$ mètres.

φ_m	Valeurs maxima des erreurs de		
	$\frac{1}{2}\alpha$	A_m	S
40°	0″,0000	0″,0001	1 mm.
45°	0″,0000	0″,0001	1 »
50°	0″,0000	0″,0001	1 »
55°	0″,0001	0″,0002	2 »
60°	0″,0001	0″,0003	3 »
65°	0″,0002	0″,0006	5 »
70°	0″,0004	0″,0013	10 »
75°	0″,0009	0″,0040	24 »
80°	0″,0031	0″,0197	95 »
85°	0″,0254	0″,3107	1252 »
90°	—	—	—

De ces tableaux, il est facile de déduire jusqu'à quelle latitude les formules en question peuvent encore être appliquées, avec un degré donné d'exactitude, pour des distances maxima de 100000 et de 200000 mètres.

Si l'on calcule avec des logarithmes à 7 décimales, on peut, pour une longueur maximum de 100000 mètres, employer ces formules jusqu'à environ 85° de latitude, sans commettre d'erreur notablement plus forte que celle pouvant résulter d'une erreur d'une unité de la dernière décimale. Pour une distance maximum de 200000 mètres, on peut encore faire usage des formules jusqu'à 75° au moins, c'est-à-dire jusqu'à une latitude plus élevée que toutes celles où des triangulations ont été exécutées jusqu'à ce jour.

Exige-t-on un plus haut degré d'exactitude, veut-on, par exemple, avoir les azimuts à un dix-millième de seconde près et les distances à un millimètre près, on peut, pour une distance maximum de 100000 mètres, appliquer ces formules jusqu'à la latitude de 70°. Pour une distance de 200000 mètres, il n'est alors permis d'aller que jusqu'à 40°. Toutefois, jusqu'à la latitude de 55°, et par conséquent aussi pour toute l'étendue des Pays-Bas, l'erreur peut s'élever tout au plus à 0″,0002 pour l'azimut et à 2 millimètres pour la distance.

Bien entendu, pour atteindre ce degré d'exactitude dans le calcul, il faut faire usage de logarithmes à 10 décimales.

B. Développement des formules.

§ 9. Passant à la démonstration des formules ci-dessus communiquées, nous considérons d'abord la Terre comme une sphère, sur laquelle sont situés les deux points A_1 et A_2 avec les latitudes géographiques φ_1 et φ_2 et la différence de longitude λ. Si, comme il a été indiqué précédemment, nous prenons toujours

pour A_2 le point qui a la latitude la plus grande, il pourra se présenter deux cas, qui sont représentés dans les fig. 1 et 2, Pl. 3. Le triangle sphérique, formé par la ligne de jonction s' des deux points et par les portions de méridiens comprises entre ces points et le pôle P, a pour côtés: $A_1 P = 90° - \varphi_1$, $A_2 P = 90° - \varphi_2$ et $A_1 A_2 = s'$ et pour angles $A_1 P A_2 = \lambda$, $P A_1 A_2 = A'_1 = A'_m - \frac{1}{2} \alpha'$ et $A_1 A_2 P = A'_2 = 180° - A'_m - \frac{1}{2} \alpha'$, où A'_m désigne l'azimut moyen et α' la convergence des méridiens.

Posons encore la latitude moyenne $\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = \varphi_m$ et la différence de latitude $(\varphi_2 - \varphi_1) = \beta$; les analogies de Gauss donnent alors immédiatement:

$$cos \tfrac{1}{2} s' \, sin \tfrac{1}{2} \alpha' = sin \tfrac{1}{2} \lambda \, sin \, \varphi_m \quad \dots\dots \quad (1)$$

$$cos \tfrac{1}{2} s' \, cos \tfrac{1}{2} \alpha' = cos \tfrac{1}{2} \beta \, cos \tfrac{1}{2} \lambda \quad \dots\dots \quad (2)$$

$$sin \tfrac{1}{2} s' \, sin \, A'_m = sin \tfrac{1}{2} \lambda \, cos \, \varphi_m \quad \dots\dots \quad (3)$$

$$sin \tfrac{1}{2} s' \, cos \, A'_m = sin \tfrac{1}{2} \beta \, cos \tfrac{1}{2} \lambda \quad \dots\dots \quad (4)$$

Le rayon de la sphère étant représenté, en outre, par R', la longueur de la corde $A_1 A_2$ par K' et la longueur de l'arc $A_1 A_2$ par S', on a:

$$K' = 2 R' \, sin \tfrac{1}{2} s'$$

$$S' = R' s',$$

d'où se déduisent facilement les formules (1), (2), (3), (28), (29) et (30) de la section A.

La solution pour une surface sphérique est, de cette manière, entièrement donnée; pour le développement ultérieur, nous avons encore besoin de quelques autres formules relatives à la sphère, formules que nous allons faire connaître.

En multipliant (1) par (2) et (3) par (4) on obtient:

$$sin \tfrac{1}{2} \alpha' \, cos \tfrac{1}{2} \alpha' \, cos^2 \tfrac{1}{2} s' = sin \tfrac{1}{2} \lambda \, cos \tfrac{1}{2} \lambda \, sin \, \varphi_m \, cos \tfrac{1}{2} \beta \quad \dots \quad (5)$$

$$sin \, A'_m \, cos \, A'_m \, sin^2 \tfrac{1}{2} s' = sin \tfrac{1}{2} \lambda \, cos \tfrac{1}{2} \lambda \, cos \, \varphi_m \, sin \tfrac{1}{2} \beta, \quad \dots \quad (6)$$

et en divisant ces mêmes expressions l'une par l'autre:

$$tg\ \tfrac{1}{2}\,\alpha' = tg\ \tfrac{1}{2}\,\lambda\ sin\ \varphi_m\ sec\ \tfrac{1}{2}\,\beta \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$tg\ A'_m = tg\ \tfrac{1}{2}\,\lambda\ cos\ \varphi_m\ cosec\ \tfrac{1}{2}\,\beta\ ; \ldots\ldots \quad (8)$$

ces deux dernières expressions donnent à leur tour, par la division:

$$tg\ \tfrac{1}{2}\,\alpha' = tg\ \tfrac{1}{2}\,\beta\ tg\ \varphi_m\ tg\ A'_m \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

De la règle des sinus il suit, en outre,

$$\frac{cos\ \varphi_1}{sin\ A'_2} = \frac{sin\ s'}{sin\ \lambda} = \frac{cos\ \varphi_2}{sin\ A'_1}\,, \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

tandis que la formule de la cotangente donne:

$$ctg\ A'_1 = \frac{sin\ \varphi_2\ cos\ \varphi_1 - sin\ \varphi_1\ cos\ \varphi_2\ cos\ \lambda}{cos\ \varphi_2\ sin\ \lambda} \ldots\ldots \quad (11)$$

et la formule du cosinus:

$$cos\ s' = sin\ \varphi_1\ sin\ \varphi_2 + cos\ \varphi_1\ cos\ \varphi_2\ cos\ \lambda \ldots\ldots \quad (12)$$

§ 10. Soient maintenant, fig. 3, $P\ O\ B_1\ B_2$ l'axe de la Terre ellipsoïdale, $A_1\ P$ et $A_2\ P$ les méridiens de A_1 et de A_2; si on trace alors les deux normales $A_1\ B_1$ et $A_2\ B_2$, on a:

$$A_1\ B_1 = N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\ sin^2\ \varphi_1}}$$

$$A_2\ B_2 = N_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\ sin^2\ \varphi_2}}$$

$$O\ B_1 = \frac{a\ e^2\ sin\ \varphi_1}{\sqrt{1 - e^2\ sin^2\ \varphi_1}} = e^2\ N_1\ sin\ \varphi_1$$

$$O\ B_2 = \frac{a\ e^2\ sin\ \varphi_2}{\sqrt{1 - e^2\ sin\ \ \varphi_2}} = e^2\ N_2\ sin\ \varphi_2.$$

La différence des deux dernières valeurs, ou la longueur de $B_1 B_2$, sera provisoirement désignée par la lettre p; donc:

$$p = B_1 B_2 = O B_2 - O B_1 = e^2 (N_2 \sin \varphi_2 - N_1 \sin \varphi_1). \quad (13)$$

Si de A_2 nous abaissons la perpendiculaire $A_2 G$ sur le plan méridien de A_1 et du pied de celle-ci les perpendiculaires $G C$ sur $O P$ et $G D$ sur $A_1 B_1$, et si nous joignons C et D à A_2, l'angle $G C A_2 = \lambda$ est la différence de longitude et l'angle $A_2 D G = A_1$ l'azimut de la section verticale $A_1 A_2$. Menons encore de C la perpendiculaire $C F$ sur $A_1 B_1$ et de G la perpendiculaire $G E$ sur $C F$; la figure donne alors:

$$DG = CF - CE = CB_1 \cos\varphi_1 - CG \sin\varphi_1 = (CB_2 - B_1 B_2) \cos\varphi_1 - CA_2 \cos\lambda \sin\varphi_1 =$$
$$= (N_2 \sin\varphi_2 - p) \cos\varphi_1 - N_2 \cos\varphi_2 \cos\lambda \sin\varphi_1 = N_2 (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\lambda) - p \cos\varphi_1$$

expression pour laquelle nous pouvons écrire, en vertu des formules (10) et (11):

$$D G = N_2 \sin s' \cos A'_1 - p \frac{\sin s' \sin A'_2}{\sin \lambda} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (14)$$

Il suit aussi, de cette même figure:

$$G A_2 = C A_2 \sin \lambda = N_2 \cos \varphi_2 \sin \lambda ,$$

où, en ayant égard à (10):

$$G A_2 = N_2 \sin s' \sin A'_1 .$$

En divisant ces deux expressions l'une par l'autre, on obtient pour l'azimut A_1:

$$\operatorname{ctg} A_1 = \frac{D G}{G A_2} = \operatorname{ctg} A'_1 - \frac{p}{N_2 \sin \lambda} \frac{\sin A'_2}{\sin A'_1} .$$

La différence de A'_1 et A_1 étant représentée par Δ_1, donc

$$A_1 = A'_1 + \Delta_1 , \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (15)$$

on trouve pour Δ_1 :

$$tg\Delta_1 = tg(A_1 - A'_1) = \frac{ctg A'_1 - ctg A_1}{1 + ctg A'_1 \, ctg A_1} = \frac{\frac{p}{N_2 \sin\lambda} \, \frac{\sin A'_2}{\sin A'_1}}{1 + ctg^2 A'_1 - \frac{p}{N_2 \sin\lambda} \, \frac{\sin A'_2}{\sin A'_1} \, ctg\, A'_1} =$$

$$= \frac{\frac{p}{\sin\lambda} \sin A'_1 . \sin A'_2}{N_2 - \frac{p}{\sin\lambda} \sin A'_2 \cos A'_1} \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Représentons, de même, par A_2 l'angle que la section verticale $A_2 A_1$ fait avec le plan méridien de A_2, et par Δ_2 la différence entre A_2 et A'_2, donc

$$A_2 = A'_2 - \Delta_2 , \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

on trouve alors d'une manière tout à fait semblable, ou en permutant simplement entre eux les indices 1 et 2 dans la formule (16) et en ayant convenablement égard aux signes:

$$tg\,\Delta_2 = \frac{\frac{p}{\sin\lambda} \sin A'_1 \, \sin A'_2}{N_1 + \frac{p}{\sin\lambda} \sin A'_1 \cos A'_2} .$$

Si l'on désigne par L le numérateur commun de $tg\,\Delta_1$ et $tg\,\Delta_2$, et respectivement par P et Q la demi-somme et la demi-différence des dénominateurs, soit

$$L = \frac{p}{\sin\lambda} \sin A'_1 \, \sin A'_2 = \frac{p}{\sin\lambda} (\sin^2 A'_m - \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha') \, . \; . \; . \; . \; (18)$$

$$P = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{\sin\lambda} \frac{\sin(A'_2 - A'_1)}{2} = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{\sin\lambda} \sin A'_m \cos A'_m (19)$$

$$Q = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{\sin\lambda} \frac{\sin(A'_2 + A'_1)}{2} = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{\sin\lambda} \sin\tfrac{1}{2}\alpha' \cos\tfrac{1}{2}\alpha' . (20)$$

ces deux formules deviennent:

$$tg\,\Delta_1 = \frac{L}{P+Q} \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

$$tg\,\Delta_2 = \frac{L}{P-Q} \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Introduisons maintenant encore l'azimut (astromomique) moyen A_m et la convergence α des méridiens sur l'ellipsoïde, et représentons par Δ et δ les différences entre ces quantités et les quantités correspondantes A'_m et α' sur la sphère; nous avons alors les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_m - \tfrac{1}{2}\alpha \\ A_2 &= 180^\circ - A_m - \tfrac{1}{2}\alpha \\ A_m &= A'_m + \Delta \\ \alpha &= \alpha' + \delta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (23)$$

qui, combinées avec (15) et (17), donnent:

$$\Delta_1 = \Delta - \tfrac{1}{2}\delta \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

$$\Delta_2 = \Delta + \tfrac{1}{2}\delta \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

En substituant ces valeurs dans (21) et (22), on obtient:

$$(P + Q)\,sin\,(\Delta - \tfrac{1}{2}\delta) = L\,cos\,(\Delta - \tfrac{1}{2}\delta)$$

$$(P - Q)\,sin\,(\Delta + \tfrac{1}{2}\delta) = L\,cos\,(\Delta + \tfrac{1}{2}\delta),$$

d'où, par l'addition et la soustraction, suivies de la division par 2, on tire:

$$P\,sin\,\Delta\,cos\,\tfrac{1}{2}\delta - Q\,cos\,\Delta\,sin\,\tfrac{1}{2}\delta = L\,cos\,\Delta\,cos\,\tfrac{1}{2}\delta$$

$$P\,cos\,\Delta\,sin\,\tfrac{1}{2}\delta - Q\,sin\,\Delta\,cos\,\tfrac{1}{2}\delta = -L\,sin\,\Delta\,sin\,\tfrac{1}{2}\delta.$$

De celles-ci se déduisent immédiatement les deux relations suivantes:

$$P\,sin\,\tfrac{1}{2}\delta\,cos\,\tfrac{1}{2}\delta = Q\,sin\,\Delta\,cos\,\Delta \ldots\ldots (26)$$

$$tg\,\Delta = \frac{L + Q\,tg\,\tfrac{1}{2}\delta}{P} \ldots\ldots\ldots (27)$$

§ 11. Représentons l'angle que la tangente à la section verticale $A_1 A_2$ fait avec la corde par $\frac{1}{2} s_1$ et la corde elle-même par K; s_1 est alors l'angle au centre de l'arc de cercle passant par A_1 et A_2, qui en A_1 est perpendiculaire à la normale de ce point, et $A_1 D$ est par conséquent égale à $K \sin \frac{1}{2} s_1$. De la fig. 3 résulte, pour cette même ligne $A_1 D$:

$$\begin{aligned} A_1 D = A_1 B_1 - B_1 F - FD = N_1 - CB_1 \sin \varphi_1 - CG \cos \varphi_1 = \\ = N_1 - (N_2 \sin \varphi_2 - p) \sin \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2 \cos \lambda \cos \varphi_1 = \\ = N_1 - N_2 (\sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \cos \lambda) + p \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en ayant égard à (12):

$$K \sin \tfrac{1}{2} s_1 = N_1 - N_2 \cos s' + p \sin \varphi_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Si l'angle que la tangente en A_2 à la section verticale $A_2 A_1$ fait avec la corde $A_2 A_1$ est représenté par $\frac{1}{2} s_2$, de sorte que s_2 soit égal à l'angle au centre de l'arc de cercle $A_2 A_1$, qui en A_2 a la même tangente que la section verticale $A_2 A_1$, on trouve d'une manière analogue, ou plus simplement en permutant entre eux les indices 1 et 2 et en ayant convenablement égard aux signes:

$$K \sin \tfrac{1}{2} s_2 = N_2 - N_1 \cos s' - p \sin \varphi_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

En posant

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= s - \sigma \\ s_2 &= s + \sigma , \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

on déduit de (28) et (29), si l'on prend la demi-somme et la demi-différence et qu'en outre on tienne compte de (5) et (6):

$$\left. \begin{aligned} K \sin \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} \sigma = \frac{N_2 + N_1}{2} (1 - \cos s') - p \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \varphi_m = \\ = 2 \left[\frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{P}{\sin \lambda} \sin A'_m \cos A'_m \right] \sin^2 \tfrac{1}{2} s' = 2 \, P \sin^2 \tfrac{1}{2} s' \\ K \cos \tfrac{1}{2} s \sin \tfrac{1}{2} \sigma = \frac{N_2 - N_1}{2} (1 + \cos s') - p \cos \tfrac{1}{2} \beta \sin \varphi_m = \\ = 2 \left[\frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{\sin \lambda} \sin \tfrac{1}{2} \alpha' \cos \tfrac{1}{2} \alpha' \right] \cos^2 \tfrac{1}{2} s' = 2 \, Q \cos^2 \tfrac{1}{2} s', \end{aligned} \right\} . (31)$$

relations qui donnent, par la division:

$$tg \tfrac{1}{2} s \, ctg \tfrac{1}{2} \sigma = \frac{P}{Q} tg^2 \tfrac{1}{2} s' \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

De la fig. (3) il suit aussi:

$$A_2 D = K \cos \tfrac{1}{2} s_1 = \frac{DG}{\cos A_1},$$

ou, en substituant la valeur de DG donnée par (14):

$$K \cos \tfrac{1}{2} s_1 = \left[N_2 - \frac{p}{\sin \lambda} \frac{\sin A'_2}{\cos A'_1} \right] \sin s' \frac{\cos A'_1}{\cos A_1}.$$

Pour $\cos A_1$ nous pouvons écrire, en tenant compte de (15) et (16):

$$\cos A_1 = \cos (A'_1 + \Delta_1) = \cos A'_1 \cos \Delta_1 (1 - tg \Delta_1 \, tg A'_1) =$$

$$= \cos A'_1 \cos \Delta_1 \frac{N_2 - \frac{p}{\sin \lambda} \sin A'_2 \cos A'_1 - \frac{p}{\sin \lambda} \sin A'_1 \sin A'_2 \, tg A'_1}{N_2 - \frac{p}{\sin \lambda} \sin A'_2 \cos A'_1} =$$

$$= \cos A'_1 \cos \Delta_1 \frac{N_2 - \frac{p}{\sin \lambda} \frac{\sin A'_2}{\cos A'_1}}{P + Q},$$

expression qui transforme la formule précédente en:

$$K \cos \tfrac{1}{2} s_1 = \frac{P + Q}{\cos \Delta_1} \sin s'.$$

Tout à fait de la même manière, on trouve:

$$K \cos \tfrac{1}{2} s_2 = \frac{P - Q}{\cos \Delta_2} \sin s'.$$

En remplaçant maintenant s_1, s_2, Δ_1, Δ_2 par leurs valeurs suivant (24), (25) et (30), nous pouvons écrire pour les deux dernières équations, si, en outre, nous les multiplions respectivement par $\cos \Delta_1$ et $\cos \Delta_2$:

$$K \cos (\tfrac{1}{2} s - \tfrac{1}{2} \sigma) \cos (\Delta - \tfrac{1}{2} \delta) = (P + Q) \sin s'$$
$$K \cos (\tfrac{1}{2} s + \tfrac{1}{2} \sigma) \cos (\Delta + \tfrac{1}{2} \delta) = (P - Q) \sin s',$$

d'où, par l'addition et la soustraction, jointes à la division par 2, on déduit:

$$K[\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}\sigma\cos\Delta\cos\tfrac{1}{2}\delta+\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}\sigma\sin\Delta\sin\tfrac{1}{2}\delta]=P\sin s'$$
$$K[\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}\sigma\cos\Delta\cos\tfrac{1}{2}\delta+\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}\sigma\sin\Delta\sin\tfrac{1}{2}\delta]=Q\sin s'.$$

Divisons ces expressions l'une par l'autre, et divisons le numérateur et le dénominateur du premier membre par $\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}\sigma\cos\Delta\cos\frac{1}{2}\delta$; il vient:

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}s\,tg\,\frac{1}{2}\sigma+tg\,\Delta\,tg\,\frac{1}{2}\delta}{1+tg\,\frac{1}{2}s\,tg\,\frac{1}{2}\sigma\,tg\,\Delta\,tg\,\frac{1}{2}\delta}=\frac{Q}{P},$$

équation qui, étant résolue par rapport à $tg\,\frac{1}{2}s\,tg\,\frac{1}{2}\sigma$, donne:

$$tg\,\tfrac{1}{2}s\,tg\,\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{Q-P\,tg\,\Delta\,tg\,\frac{1}{2}\delta}{P-Q\,tg\,\Delta\,tg\,\frac{1}{2}\delta}.$$

Remplaçons encore, dans le numérateur de cette expression, la quantité P par sa valeur tirée de (26), et, dans le dénominateur, la quantité Q également par sa valeur tirée de (26); on obtient ainsi, après une réduction simple:

$$tg\,\tfrac{1}{2}s\,tg\,\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{Q}{P}\,\frac{\cos^2\Delta}{\cos^2\frac{1}{2}\delta}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(33)$$

Cette formule donne avec (32), par la multiplication et la division, suivies d'une extraction de racine:

$$tg\,\tfrac{1}{2}s=tg\,\tfrac{1}{2}s'\,\frac{\cos\Delta}{\cos\frac{1}{2}\delta}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(34)$$

et

$$tg\,\tfrac{1}{2}\sigma=\frac{Q}{P}\,ctg\,\tfrac{1}{2}s'\,\frac{\cos\Delta}{\cos\frac{1}{2}\delta};\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(35)$$

pour cette dernière nous pouvons aussi écrire, en ayant égard à (26):

$$tg\,\tfrac{1}{2}\sigma=ctg\,\tfrac{1}{2}s'\,\frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\sin\Delta};\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(36)$$

ainsi se trouvent déterminés s et σ, et par suite aussi s_1 et s_2.

§ 12. La longueur de la corde s'obtient le plus facilement au moyen de (31); en divisant cette expression par (34) on trouve:

$$K \cos \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} \sigma = 2 \frac{P}{\cos \Delta} \sin \tfrac{1}{2} s' \cos \tfrac{1}{2} s' \cos \tfrac{1}{2} \delta,$$

et par conséquent:

$$K = 2 \frac{P}{\cos \Delta} \sin \tfrac{1}{2} s' \frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma} \dots\dots\dots\dots (37)$$

Pour le calcul, il est plus facile de déterminer d'abord la valeur de $K \sin A_m$ et de $K \cos A_m$.

Pour $\sin A_m$ et $\cos A_m$ nous trouvons, eu égard à (23) et à (27):

$$\left.\begin{aligned} \sin A_m &= \sin(A'_m + \Delta) = \sin A'_m \cos \Delta \,(1 + tg\, \Delta\, ctg\, A'_m) = \\ &= \sin A'_m \frac{\cos \Delta}{P} (P + L\, ctg\, A'_m + Q\, tg\, \tfrac{1}{2} \delta\, ctg\, A'_m) \\ \cos A_m &= \cos(A'_m + \Delta) = \cos A'_m \cos \Delta \,(1 - tg\, \Delta\, tg\, A'_m) = \\ &= \cos A'_m \frac{\cos \Delta}{P} (P - L\, tg\, A'_m - Q\, tg\, \tfrac{1}{2} \delta\, tg\, A'_m) \end{aligned}\right\} \cdot (38)$$

expressions dont on déduit, en les multipliant par (37) et en tenant compte de (3) et de (4):

$$\left.\begin{aligned} K \sin A_m &= 2\,(P + L\, ctg\, A'_m + Q\, tg\, \tfrac{1}{2} \delta\, ctg\, A'_m) \frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma} \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \\ K \cos A_m &= 2\,(P - L\, tg\, A'_m - Q\, tg\, \tfrac{1}{2} \delta\, tg\, A'_m) \frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma} \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \end{aligned}\right\} . (39)$$

§ 13. Les formules établies jusqu'ici sont absolument exactes; elles se prêtent mal, toutefois, au calcul direct, raison pour laquelle nous devrons développer en séries quelques-unes des quantités qui y entrent. Cela sera le cas surtout pour les facteurs:

$$P + L \, ctg \, A'_m + Q \, tg \, \tfrac{1}{2} \delta \, ctg \, A'_m,$$

$$P - L \, tg \, A'_m - Q \, tg \, \tfrac{1}{2} \delta \, tg \, A'_m$$

et

$$\frac{\cos \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma},$$

ainsi que pour le rapport $\frac{Q}{P}$ qui, joint à (26), détermine la correction δ réclamée par α'; les valeurs de P et de L séparément sont moins nécessaires.

De (18), (19) et (20), il suit:

$$P + L \, ctg \, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{\sin \lambda} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha' \, ctg \, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \, tg A'_m}{2 \, tg \, \frac{1}{2} \lambda} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha'}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda} \frac{tg^2 \frac{1}{2} \alpha'}{tg^2 A'_m}$$

$$P - L \, tg \, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p}{\sin \lambda} \cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha' \, tg \, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \, tg A'_m}{2 \, tg \, \frac{1}{2} \lambda} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha'}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda}$$

$$Q = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p}{\sin \lambda} \sin \tfrac{1}{2} \alpha' \cos \tfrac{1}{2} \alpha' = \frac{N_2 - N_1}{2} - \frac{p \, tg A'_m}{2 \, tg \, \frac{1}{2} \lambda} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha'}{\cos^2 \frac{1}{2} \lambda} \frac{tg \frac{1}{2} \alpha'}{tg A'_m},$$

et si l'on tient compte des relations (2), (8) et (9), d'où l'on tire

$$\frac{\cos \frac{1}{2} \alpha'}{\cos \frac{1}{2} \lambda} = \frac{\cos \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} s'},$$

$$\frac{tg \, A'_m}{tg \, \frac{1}{2} \lambda} = \frac{\cos \varphi_m}{\sin \frac{1}{2} \beta}$$

et
$$\frac{tg \, \frac{1}{2} \alpha'}{tg \, A'_m} = tg \, \tfrac{1}{2} \beta \, tg \, \varphi_m,$$

ces expressions se transforment en:

$$P + L \, ctg \, A'_m = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2} \beta} tg^2 \varphi_m \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \beta}{\cos^2 \frac{1}{2} s'} \quad \ldots \ldots (40)$$

$$P - L\,tg\,A'_m = \frac{N_2+N_1}{2} - \frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'} =$$

$$= \frac{N_2+N_1}{2} - \frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta} - \frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,\frac{(\sin^2\frac{1}{2}s' - \sin^2\frac{1}{2}\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}s'} \quad (41)$$

$$Q = \frac{N_2-N_1}{2} - \frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,tg\,\varphi_m\,\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Occupons-nous, en premier lieu, des quantités $\frac{N_2+N_1}{2}$, $\frac{N_2-N_1}{2}$, $\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$ et $\frac{N_2+N_1}{2} - \frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$, qui dépendent seulement des latitudes φ_1 et φ_2 des deux points.

Nous développerons ces quantités en séries, où elles seront exprimées exclusivement en fonction de la latitude moyenne φ_m et de la demi-différence de latitude $\frac{1}{2}\beta$, et nous étendrons ces séries un peu plus loin qu'il ne serait nécessaire pour les déductions ultérieures, parce que les expressions dont il s'agit trouvent leur application dans beaucoup d'autres cas.

Si nous remplaçons φ_2 par $(\varphi_m + \frac{1}{2}\beta)$, nous obtenons pour N_2 l'expression

$$N_2 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2(\varphi_m+\frac{1}{2}\beta)}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_m - e^2\sin\frac{1}{2}\beta(\sin 2\varphi_m\cos\frac{1}{2}\beta + \cos 2\varphi_m\sin\frac{1}{2}\beta)}},$$

ou, en divisant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_m}$ et en posant, pour abréger,

$$\frac{e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_m} = w,$$

l'expression :

$$N_2 = N_m\left[1 - w\sin\tfrac{1}{2}\beta(\sin 2\varphi_m\cos\tfrac{1}{2}\beta + \cos 2\varphi_m\sin\tfrac{1}{2}\beta)\right]^{-\frac{1}{2}};$$

en appliquant à celle-ci la formule du binôme, et en posant pour un instant

$$\sin 2\varphi_m\cos\tfrac{1}{2}\beta + \cos 2\varphi_m\sin\tfrac{1}{2}\beta = x,$$

elle devient

$$N_2 = N_m \Big[1 + \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta\, x + \tfrac{3}{8} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, x^2 + \tfrac{5}{16} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta\, x^3 + $$
$$+ \tfrac{35}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta x^4 + \tfrac{63}{256} w^5 \sin^5 \tfrac{1}{2}\beta x^5 + \tfrac{231}{1024} w^6 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta x^6 + \ldots\ldots \Big]$$

Pour développer N_1, il n'y a qu'à changer le signe de β; en faisant alors

$$\sin 2\varphi_m \cos \tfrac{1}{2}\beta - \cos 2\varphi_m \sin \tfrac{1}{2}\beta = y,$$

on trouve :

$$N_1 = N_m \Big[1 - \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta\, y + \tfrac{3}{8} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, y^2 - \tfrac{5}{16} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta\, y^3 + $$
$$+ \tfrac{35}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta y^4 - \tfrac{63}{256} w^5 \sin^5 \tfrac{1}{2}\beta y^5 + \tfrac{231}{1024} w^6 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta y^6 - \ldots\ldots \Big]$$

puis, en prenant la demi-somme et la demi-différence de N_2 et N_1 :

$$\frac{N_2+N_1}{2} = N_m \Big[1 + \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta \frac{x-y}{2} + \tfrac{3}{8} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^2+y^2}{2} + \tfrac{5}{16} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^3-y^3}{2} + $$
$$+ \tfrac{35}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^4+y^4}{2} + \tfrac{63}{256} w^5 \sin^5 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^5-y^5}{2} + \tfrac{231}{1024} w^6 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta \frac{x^6+y^6}{2} + \ldots\ldots \Big]$$

$$\frac{N_2-N_1}{2} = N_m \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}\beta \frac{x+y}{2} \Big[1 + \tfrac{3}{4} w \sin \tfrac{1}{2}\beta (x-y) + \tfrac{5}{8} w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta (x^2 - xy + y^2) + $$
$$+ \tfrac{35}{64} w^3 \sin^3 \tfrac{1}{2}\beta (x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3) + \tfrac{63}{128} w^4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta (x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4) + \ldots\ldots \Big]$$

Introduisons maintenant de nouveau les valeurs de x et de y, remplaçons, entre les parenthèses brisées, $\cos^2 \frac{1}{2}\beta$ par $(1 - \sin^2 \frac{1}{2}\beta)$ et ordonnons suivant $\sin \frac{1}{2}\beta$; il vient :

$$\frac{N_2+N_1}{2} = N_m \Big[1 + \tfrac{1}{2} w \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \{ \cos 2\varphi_m + \tfrac{3}{4} w \sin^2 2\varphi_m \} + \tfrac{3}{8} w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \{ \cos 4\varphi_m + $$
$$+ \tfrac{5}{4} w \sin 4\varphi_m \sin 2\varphi_m + \tfrac{35}{48} w^2 \sin^4 2\varphi_m \} + \tfrac{5}{16} w^3 \sin^6 \tfrac{1}{2}\beta \{ \cos 6\varphi_m + $$
$$+ \tfrac{7}{4} w \sin 6\varphi_m \sin 2\varphi_m + \tfrac{63}{32} w^2 \sin 4\varphi_m \sin^3 2\varphi_m + \tfrac{231}{320} w^3 \sin^6 2\varphi_m \} + \ldots\ldots \Big] \quad (44)$$

$$\frac{N_2 - N_1}{2} = N_m \tfrac{1}{2}\, w \sin\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\beta \sin 2\varphi_m \Big[1 + w \sin^2\tfrac{1}{2}\beta \,\{ \tfrac{3}{2} \cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{8} w \sin^2 2\varphi_m \} +$$
$$+ w^2 \sin^4\tfrac{1}{2}\beta \,\{ \tfrac{5}{8}(3\cos^2 2\varphi_m - \sin^2 2\varphi_m) + \tfrac{35}{16} w \sin^2 2\varphi_m \cos 2\varphi_m + \tfrac{63}{128} w^2 \sin^4 2\varphi_m \} +$$
$$+ w^3 \sin^6\tfrac{1}{2}\beta \,\{ \tfrac{35}{16}(\cos^3 2\varphi_m - \sin^2 2\varphi_m \cos 2\varphi_m) + \tfrac{63}{64} w (5\sin^2 2\varphi_m \cos^2 2\varphi_m - \sin^4 2\varphi_m) +$$
$$+ \tfrac{693}{256} w^2 \sin^4 2\varphi_m \cos 2\varphi_m + \tfrac{429}{1024} w^3 \sin^6 2\varphi_m) \} + \dots\dots \Big] \quad \dots\dots\dots \quad (45)$$

En introduisant, dans la formule (13), pour φ_1 et φ_2 les valeurs $\varphi_m - \frac{1}{2}\beta$ et $\varphi_m + \frac{1}{2}\beta$, on trouve:

$$p = e^2 \Big[N_2 \sin(\varphi_m + \tfrac{1}{2}\beta) - N_1 \sin(\varphi_m - \tfrac{1}{2}\beta) \Big] =$$
$$= e^2 \Big[(N_2 + N_1) \cos\varphi_m \sin\tfrac{1}{2}\beta + (N_2 - N_1) \sin\varphi_m \cos\tfrac{1}{2}\beta \Big];$$

si l'on substitue ici pour e^2 la valeur $\frac{w}{1 + w \sin^2\varphi_m}$, qui résulte de (43), et qu'on multiplie par $\frac{\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$, il vient:

$$\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta} = w \Big[\frac{N_2 + N_1}{2} \; \frac{\cos^2\varphi_m}{1 + w\sin^2\varphi_m} + \frac{N_2 - N_1}{2} \; ctg\,\tfrac{1}{2}\beta \; \frac{\sin\varphi_m \cos\varphi_m}{1 + w\sin^2\varphi_m} \Big],$$

expression qui, à l'aide des valeurs ci-dessus trouvées pour $\frac{N_2 + N_1}{2}$ et $\frac{N_2 - N_1}{2}$, donne, après quelques réductions:

$$\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta} = N_m w \cos^2\varphi_m \Big[1 + w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \,\{ \tfrac{1}{2}(2\cos 2\varphi_m - 1) + \tfrac{5}{8} w \sin^2 2\varphi_m \} +$$
$$+ w^2 \sin^4\tfrac{1}{2}\beta \,\{ \tfrac{3}{8}(4\cos^2 2\varphi_m - 2\cos 2\varphi_m - 1) + \tfrac{7}{16} w \sin^2 2\varphi_m (4\cos 2\varphi_m - 1) +$$
$$+ \tfrac{63}{128} w^2 \sin^4 2\varphi_m \} + w^3 \sin^6\tfrac{1}{2}\beta \,\{ \tfrac{5}{16}(8\cos^3 2\varphi_m - 4\cos^2 2\varphi_m - 4\cos 2\varphi_m + 1) +$$
$$+ \tfrac{45}{64} w \sin^2 2\varphi_m (6\cos^2 2\varphi_m - 2\cos 2\varphi_m - 1) +$$
$$+ \tfrac{99}{256} w^2 \sin^4 2\varphi_m (6\cos 2\varphi_m - 1) + \tfrac{429}{1024} w^3 \sin^6 2\varphi_m \} + \dots\dots \Big] \quad \dots\dots \quad (46)$$

En retranchant encore cette expression de $\frac{N_2+N_1}{2}$ et en ayant égard à la relation

$$N_m(1-w\cos^2\varphi_m) = N_m\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_m} = R_m,$$

on obtient:

$$\frac{N_2+N_1}{2} - \frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta} = R_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\{\cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{4}w\sin^2 2\varphi_m\} +$$
$$\tfrac{3}{8}w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\{\cos 4\varphi_m + \tfrac{7}{4}w\sin 4\varphi_m\sin 2\varphi_m + \tfrac{21}{16}w^2\sin^4 2\varphi_m\} + \tfrac{5}{16}w^3\sin^6\tfrac{1}{2}\beta\{\cos 6\varphi_m +$$
$$+\tfrac{9}{4}w\sin 6\varphi_m\sin 2\varphi_m + \tfrac{99}{32}w^2\sin 4\varphi_m\sin^3 2\varphi_m + \tfrac{429}{320}w^3\sin^6 2\varphi_m\} + \ldots\ldots\Big] \quad \ldots . (47)$$

§ 14. Si nous ne développons que jusqu'aux quantités du dixième ordre près, — e, s', β et $\lambda\cos\varphi_m$ étant considérés comme des quantités du premier ordre, — les expressions ci-dessus obtenues peuvent être écrites de la manière suivante: [1])

$$\frac{N_2+N_1}{2} = N_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\{\cos 2\varphi_m + \tfrac{3}{4}w\sin^2 2\varphi_m\} +$$
$$+\tfrac{3}{8}w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\cos 4\varphi_m + T_{10}\Big] \quad \ldots\ldots (48)$$

$$\frac{N_2+N_1}{2} - \frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta} = R_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\{\cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{4}w\sin^2 2\varphi_m\} +$$
$$+\tfrac{3}{8}w^2\sin^4\tfrac{1}{2}\beta\cos 4\varphi_m + T_{10}\Big] \quad \ldots\ldots (49)$$

$$\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta} = N_m w\cos^2\varphi_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta(2\cos 2\varphi_m - 1) + T_6\Big] \quad . (50)$$

Pour l'expression $\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'}$, dans la form. (40), nous pouvons écrire

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\beta + \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s' + \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s'\,tg^2\tfrac{1}{2}s',$$

et en transportant cette valeur, ainsi que (48) et (50), dans (40),

[1]) T_{10} et T_6 représentent des termes de 10e et de 6e ordre.

nous trouvons:

$$P+L\,ctg\,A_m=N_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\,sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,\{cos\,2\,\varphi_m+\tfrac{3}{4}\,w\,sin^2 2\,\varphi_m\}-w\,sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,sin^2\,\varphi_m+$$
$$+w^2\,sin^4\tfrac{1}{2}\beta\,\{\tfrac{3}{8}\,cos\,4\,\varphi_m-\tfrac{1}{2}\,sin^2\,\varphi_m\,(2\,cos\,2\,\varphi_m-1)\}-w\,sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,sin^2\tfrac{1}{2}\,s'\,sin^2\,\varphi_m-$$
$$-w\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,s'\,tg^2\,\tfrac{1}{2}\,s'\,sin^2\,\varphi_m+T_{10}\Big]\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(51)$$

Pour l'expression $\dfrac{sin^2\,\frac{1}{2}\,s'-sin^2\,\frac{1}{2}\,\beta}{cos^2\,\frac{1}{2}\,s'}$, dans la form. (41), on peut écrire:

$$(sin^2\tfrac{1}{2}\lambda cos^2\varphi_m+sin^2\tfrac{1}{2}\beta cos^2\tfrac{1}{2}\lambda-sin^2\tfrac{1}{2}\beta)(1+sin^2\tfrac{1}{2}s'+sin^2\tfrac{1}{2}s'tg^2\tfrac{1}{2}s')=$$
$$=sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,cos^2\varphi_m-sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,sin^2\tfrac{1}{2}\lambda+sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,cos^2\varphi_m sin^2\tfrac{1}{2}s'-sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,sin^2\tfrac{1}{2}\lambda sin^2\tfrac{1}{2}s'+$$
$$+sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,cos^2\varphi_m sin^2\tfrac{1}{2}s'\,tg^2\tfrac{1}{2}s'-sin^2\tfrac{1}{2}\beta sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,sin^2\tfrac{1}{2}s'\,tg^2\tfrac{1}{2}s'.$$

Cette valeur étant introduite dans (41), le dernier terme devient du 10e ordre et peut par conséquent être négligé; en substituant aussi, dans cette même formule, les expressions (49) et (50), et en tenant compte de la relation

$$N_m\omega=N_m\frac{e^2}{1-e^2\,sin^2\varphi_m}=R_m\frac{e^2}{1-e^2},$$

on obtient:

$$P-L\,tg\,A'_m=R_m\Big[1+\tfrac{1}{2}w\,sin^2\tfrac{1}{2}\beta\Big\{cos\,2\varphi_m+\tfrac{5}{4}w\,sin^2 2\varphi_m\Big\}-\frac{e^2}{1-e^2}\,sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,cos^4\,\varphi_m+$$
$$+\tfrac{3}{8}\,w^2\,sin^4\tfrac{1}{2}\beta\,cos\,4\,\varphi_m+\frac{e^2}{1-e^2}\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\lambda\,cos^2\varphi_m-$$
$$-\frac{e^2}{1-e^2}\,w sin^2\tfrac{1}{2}\beta sin^2\tfrac{1}{2}\lambda cos^4\varphi_m\,\frac{2cos2\varphi_m-1}{2}-\frac{e^2}{1-e^2}\,sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,cos^4\varphi_m sin^2\tfrac{1}{2}s'+$$
$$+\frac{e^2}{1-e^2}sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\,cos^2\varphi_m sin^2\tfrac{1}{2}s'-\frac{e^2}{1-e^2}sin^2\tfrac{1}{2}\lambda cos^4\varphi_m sin^2\tfrac{1}{2}s'tg^2\tfrac{1}{2}s'+T_{10}\Big].(52)$$

Pour développer $\frac{Q}{P}$, aux quantités du 9e ordre près, nous avons:

$$\frac{N_2-N_1}{2}=N_m\,w\,sin\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,cos\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,sin\,\varphi_m\,cos\,\varphi_m\,\Big[1+\tfrac{3}{2}\,w\,sin^2\,\tfrac{1}{2}\,\beta\,cos\,2\,\varphi_m+T_6\Big]$$

$$\frac{p\cos\varphi_m}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,tg\varphi_m\,\frac{\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'}=N_m\,w\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\varphi_m\cos\varphi_m\left[\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}s'}+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}w\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'}(2\cos 2\varphi_m-1)+T_6\right],$$

d'où il suit, par soustraction :

$$Q=N_m\,w\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\varphi_m\cos\varphi_m\left[1-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}s'}+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}w\frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta}{\cos^2\frac{1}{2}s'}(3\cos 2\varphi_m\cos^2\tfrac{1}{2}s'-2\cos 2\varphi_m+1)+T_6\right],$$

ou, en remplaçant $\sin^2\frac{1}{2}\beta$ par $\sin^2\frac{1}{2}s'\dfrac{\cos^2 A'_m}{\cos^2\frac{1}{2}\lambda}$ et en développant :

$$Q=-N_m\,w\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\varphi_m\cos\varphi_m\,tg^2\tfrac{1}{2}s'\Big[$$

$$\left[1-w\cos^2 A'_m\frac{\cos 2\varphi_m+1-3\sin^2\frac{1}{2}s'\cos 2\varphi_m}{2\cos^2\frac{1}{2}\lambda}+T_4\right]=$$

$$=-N_m w\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\varphi_m\cos\varphi_m tg^2\tfrac{1}{2}s'\left[1-w\cos^2\varphi_m\cos^2 A'_m+T_4\right].\ (53)$$

Pour la valeur de P, nous trouvons au moyen de (51) et (52), aux quantités du 4e ordre près :

$$P=(P+L\,ctg A'_m)\sin^2 A'_m+(P-L\,tg\,A'_m)\cos^2 A'_m=N_m\sin^2 A'_m+$$

$$+R_m\cos^2 A'_m+T_4=N_m\left[1-w\cos^2\varphi_m\cos^2 A'_m+T_4\right]\ .\ .\ .\ .\ (54)$$

En divisant l'une par l'autre les expressions (53) et (54), nous obtenons enfin :

$$\frac{Q}{P}=-w\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\,tg^2\tfrac{1}{2}s'\sin\varphi_m\cos\varphi_m+T_9,\ .\ (55)$$

d'où il resulte que $\dfrac{Q}{P}$ est une quantité du 5e ordre.

Pour L nous trouvons de même, au moyen de (51) et (52), aux quantités du 4e ordre près :

$$L = \left[(P + L\, ctg\, A'_m) - (P - L\, tg\, A'_m)\right] sin\, A'_m\, cos\, A'_m =$$
$$= (N_m - R_m) sin A'_m cos A'_m + T_4 = N_m w cos^2 \varphi_m sin A'_m cos A'_m + T_4 \quad (56)$$

§ 15. Pour $tg\,\Delta$, on trouve au moyen de (27), en s'aidant de (54) et de (56),

$$tg\,\Delta = \frac{w\, cos^2\, \varphi_m\, sin\, A'_m\, cos\, A'_m}{1 - w\, cos^2\, \varphi_m\, cos^2\, A'_m} + T_4 \quad . . . . (57)$$

d'où il suit que Δ est une quantité du 2ᵉ ordre. De (26) on conclut ensuite que δ est du 7ᵉ ordre, et par conséquent $\frac{Q}{P}\, tg \frac{1}{2} \delta$ du 12ᵉ ordre; de là il résulte :

$$tg\,\Delta = \frac{L}{P} + T_{12} \quad . . . . (58)$$

$$P + L\, ctg\, A'_m + Q\, tg\, \tfrac{1}{2}\delta\, ctg\, A'_m = P + L\, ctg\, A'_m + T_{12} \quad .(59)$$

$$P - L\, tg\, A'_m - Q\, tg\, \tfrac{1}{2}\delta\, tg\, A'_m = P - L\, tg\, A'_m + T_{12} \quad . (60)$$

En divisant maintenant l'une par l'autre les équations (38), et en ayant égard à (51), (52), (59) et (60), nous trouvons, aux quantités du 6ᵉ ordre près : [1])

$$tg A_m = \frac{N_m}{R_m} tg A'_m \left[1 - \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \varphi_m + \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda cos^4 \varphi_m + T_6\right] =$$
$$= \frac{tg\, A'_m}{1 - w cos^2 \varphi_m} \left[1 - \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\, sin^2 \varphi_m + \frac{e^2}{1-e^2} sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda cos^4 \varphi_m + T_6\right] \quad . . (61)$$

ou, aux quantités du 4ᵉ ordre près :

$$tg\, A_m = \frac{tg\, A'_m}{1 - w\, cos^2\, \varphi_m} + T_4 \quad . . . . . . (62)$$

---

[1]) Dans cette formule, le terme qui contient $sin^2 \frac{1}{2} \beta$ est en réalité $w\, sin^2 \frac{1}{2} \beta\, (sin^2\, \varphi_m + w\, sin^2\, \varphi_m\, cos^4\, \varphi_m)$, mais il se réduit à la forme ci-dessus, si l'on néglige un terme de l'ordre $e^6\, \beta^2$ (voir, plus loin, form. (71)).

A l'aide de cette équation, il est facile de trouver pour Δ l'expression suivante en A_m, qui a le même degré d'exactitude que son expression en A'_m dans la form. (57):

$$tg\Delta = tg(A_m - A'_m) = \frac{tgA_m - tg\,A'_m}{1 + tgA_m tg\,A'_m} = \frac{tg\,A_m - tg\,A_m(1 - w\cos^2\varphi_m) + T_4}{1 + tg^2 A_m(1 - w\cos^2\varphi_m) + T_4} =$$

$$= \frac{w\cos^2\varphi_m \sin A_m \cos A_m}{1 - w\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m} + T_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

Pour le calcul de δ, nous avons besoin, d'après (26), des valeurs de $\sin\Delta$ et de $\cos\Delta$. La première est:

$$\sin\Delta = \sin(A_m - A'_m) = \sin A_m \cos A'_m - \cos A_m \sin A'_m,$$

où nous substituons pour $\sin A_m \cos A'_m$ sa valeur tirée de (61), à savoir:

$$\sin A_m \cos A'_m = \frac{\sin A'_m \cos A_m}{1 - w\cos^2\varphi_m}\left[1 - \frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m + \frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m + T_6\right],$$

ce qui donne:

$$\sin\Delta = \sin A'_m \cos A_m\left[\frac{1}{1 - w\cos^2\varphi_m} - \frac{e^2}{1-e^2}\,\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m - \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m}{1 - w\cos^2\varphi_m} - 1 + T_6\right] =$$

$$= \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m \sin A'_m \cos A_m\left[1 - \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\, tg^2\varphi_m - \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m}{1 - w\cos^2\varphi_m} + T_4\right]. \quad (64)$$

Pour $\cos\Delta$ on trouve:

$$\cos\Delta = \cos A_m \cos A'_m + \sin A_m \sin A'_m$$

expression qui, par la substitution de la valeur de $\sin A'_m$ tirée de (62):

$$\sin A'_m = \cos A'_m\, tg\, A_m(1 - w\cos^2\varphi_m) + T_4,$$

devient:

$$\cos\Delta = \frac{\cos A'_m}{\cos A_m}\left[1 - w\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m\right] + T_4 \quad ..\ (65)$$

Cette expression étant introduite dans (26), on obtient :

$$\tfrac{1}{2}\delta = \frac{Q}{P}\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m \sin A'_m \cos A'_m \frac{1-w\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m}{1-w\cos^2\varphi_m}\Big[1-$$

$$-w\cos^2\varphi_m - \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\, tg^2\varphi_m + \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m\Big] + T_{11}$$

ou, si l'on substitue en outre la valeur de $\frac{Q}{P}$ donnée par (55), et qu'on ait égard à l'équation (6) :

$$\tfrac{1}{2}\delta = -w\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}\lambda\sec^2\tfrac{1}{2}s'\sin\varphi_m\cos^4\varphi_m\Big[1-w\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m-$$

$$-\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\, tg^2\varphi_m + \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m\Big] + T_{11} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (66)$$

D'après cette formule, pour la distance considérable de $\frac{1}{10}$ du rayon de l'équateur, $\frac{1}{2}\delta$ atteint tout au plus une valeur de 0″00015 ; cette quantité étant négligeable, il est toujours permis de prendre α' au lieu de α.

Il ne sera pas nécessaire d'entrer à ce sujet dans plus de développements ; nous pouvons nous contenter de renvoyer à l'ouvrage déjà cité de M. Helmert, où la question est traitée en détail au § 8 (règle de Dalby) du Chap. 4, page 50. Notons seulement que la quantité considérée par M. Helmert est δ même, donc le double de la correction $\frac{1}{2}\delta$ employée ci-dessus.

§ 16. Pour le développement du facteur $\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}\sigma}$, nous avons, d'après (34) et (35) :

$$\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}s'\cos^2\tfrac{1}{2}\delta(1+tg^2\tfrac{1}{2}s')} = \sqrt{\cos^2\tfrac{1}{2}s'\cos^2\tfrac{1}{2}\delta + \sin^2\tfrac{1}{2}s'\cos^2\Delta} =$$

$$= \sqrt{1-\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\Delta - \cos^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\tfrac{1}{2}\delta} = \sqrt{1-\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\Delta + T_{14}} =$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\Delta + T_{12}.$$

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\sigma}=\sqrt{1+tg^2\,\tfrac{1}{2}\sigma}=\sqrt{1+\frac{Q^2}{P^2}\,ctg^2\tfrac{1}{2}s'\,\frac{\cos^2\Delta}{\cos^2\frac{1}{2}\delta}}=1+\tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{P^2}\,ctg^2\tfrac{1}{2}s'\cos^2\Delta+T_{16}$$

et par conséquent:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\ \cos\frac{1}{2}\sigma}=1-\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\Delta+\tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{P^2}\,ctg^2\tfrac{1}{2}s'\cos^2\Delta+T_{12}\,;$$

en substituant encore les valeurs de Δ, s' et $\frac{Q}{P}$, suivant (4), (55) et (64), on obtient, à des quantités du dixième ordre près:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\ \cos\frac{1}{2}\sigma}=1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^6\varphi_m\cos^2A_m\Big[1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,tg^2\varphi_m+$$
$$+2\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m\Big]+\tfrac{1}{2}w^2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\,tg^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m\cos^2\varphi_m+T_{10}\,. \quad (67)$$

§ 17. Développons maintenant les logarithmes des deux facteurs qui entrent dans les formules (39) et que, pour abréger, nous représenterons par V et W, savoir:

$$V=\left(P+L\,ctg\,A'_m+Q\,tg\,\tfrac{1}{2}\delta\,ctg\,A'_m\right)\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\ \cos\frac{1}{2}\sigma}$$
$$W=\left(P-L\,tg\,A'_m-Q\,tg\,\tfrac{1}{2}\delta\,tg\,A'_m\right)\frac{\cos\frac{1}{2}s'\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}s\ \cos\frac{1}{2}\sigma}\,;$$

nous trouvons, aux termes du 8[e] ordre près, en vertu de (51), (52), (59), (60) et (67):

$$\log V=\log N_m+M\,w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\left\{\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi_m+\tfrac{3}{8}\,w\sin^2 2\varphi_m\right\}-M\,w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m-$$
$$-M\,w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m-\tfrac{1}{2}M\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^6\varphi_m\cos^2A_m+T_8$$

$$\log W=\log R_m+M\,w\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\left\{\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi_m+\tfrac{5}{8}\,w\sin^2 2\varphi_m\right\}-M\,\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m+$$
$$+M\,\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m-M\,\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}s'-$$
$$-\tfrac{1}{2}M\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^6\varphi_m\cos^2A_m+T_8\,.$$

Les termes du 8e ordre, négligés dans ces expressions, sont:

pour *log V*:

$$-\tfrac{1}{8} Mw^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 2\varphi_m - \tfrac{1}{2} Mw^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \sin^4 \varphi_m + Mw^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \tfrac{1}{2} \cos 2\varphi_m \sin^2 \varphi_m +$$
$$+ Mw^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \left\{ \tfrac{3}{8} \cos 4\varphi_m - \tfrac{1}{2} \sin^2 \varphi_m (2\cos 2\varphi_m - 1) \right\} - Mw \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}s' tg^2 \tfrac{1}{2}s' \sin^2 \varphi_m +$$
$$+ M\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos^4 \varphi_m \sin^2 \varphi_m \cos^2 A_m -$$
$$- M\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^8 \varphi_m \cos^2 A_m + \tfrac{1}{2} Mw^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta tg^2 \tfrac{1}{2}s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m, \quad . \; . \quad (68)$$

pour *log W*:

$$-\tfrac{1}{8} M w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \cos^2 2\varphi_m - \tfrac{1}{2} M\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^8 \varphi_m +$$
$$+ M w \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m \tfrac{1}{2} \cos 2\varphi_m + \tfrac{3}{8} M w^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\beta \cos 4\varphi_m -$$
$$- M \frac{e^2}{1-e^2} w \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m \frac{2\cos 2\varphi_m - 1}{2} +$$
$$+ M \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^2 \varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2}s' - M \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m \sin^2 \tfrac{1}{2}s' tg^2 \tfrac{1}{2}s' +$$
$$+ M\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \varphi_m \cos^4 \varphi_m \cos^2 A_m -$$
$$- M\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^8 \varphi_m \cos^2 A_m + \tfrac{1}{2} Mw^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta tg^2 \tfrac{1}{2}s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m \quad . \; . \; . \quad (69)$$

Si, de même que nous l'avons fait dans la première section, nous ne tenons compte que des termes qui ne dépassent pas le sixième ordre, les expressions pour *log V* et *log W* peuvent encore être simplifiées. Partageons en outre les termes dont elles se composent en trois groupes, l'un contenant ceux qui sont communs à *log V* et à *log W* et qui par conséquent n'ont pas d'influence sur la valeur de A_m, groupe que nous représenterons par $\log q_3$, les deux autres formés des termes qui entrent seulement dans l'une des deux expressions, groupes que nous désignerons par $\log q_1$ et $\log q_2$; nous pouvons alors poser:

$$V = N_m q_1 q_3$$
$$W = R_m q_2 q_3$$

d'où découlent les formules (22), (23) et (24) de la section A.

Parmi les termes de $\log q_3$ nous pouvons comprendre:

$$\tfrac{1}{2} M w \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{8} M w^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 2\varphi_m - \tfrac{1}{2} M \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m$$

Dans le premier de ces termes, nous écrivons pour w la valeur:

$$w = \frac{e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_m} = \frac{e^2}{1-e^2} \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_m} = \frac{e^2}{1-e^2} \frac{R_m}{N_m}.$$

Dans le second terme, nous pouvons prendre pour w^2 une valeur constante; en prenant la valeur $\frac{e^4}{1-e^2}$, nous négligeons un terme du 8e ordre, savoir

$$\tfrac{5}{8} M \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 2\varphi_m \left(w^2 - \frac{e^4}{1-e^2}\right) = \tfrac{5}{8} M \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 2\varphi_m e^4 \frac{1-e^2-(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}{(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2} =$$
$$= -\tfrac{5}{8} M \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 2\varphi_m e^6 (1-2\sin^2\varphi_m) + T_{10} = -\tfrac{5}{8} M e^6 \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 2\varphi_m \cos 2\varphi_m + T_{10},$$

qui doit être ajouté tant à (68) qu'à (69).

Pour $\log q_3$ nous pouvons donc écrire:

$$\log q_3 = \tfrac{1}{2} M \frac{e^2}{1-e^2} \frac{R_m}{N_m} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{8} M \frac{e^4}{1-e^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 2\varphi_m -$$
$$- \tfrac{1}{2} M \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^6 \varphi_m \cos^2 A_m = \tfrac{1}{2} [1] \frac{R_m}{N_m} \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \cos 2\varphi_m +$$
$$+ [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \sin^2 \varphi_m [2] \cos^2 \varphi_m - [1] \sin^2 \tfrac{1}{2}\lambda \cos^4 \varphi_m [3] \cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m; \quad (70)$$

c'est la formule (27) de la section A.

Pour les termes de $\log q_1$ il reste maintenant, en premier lieu:

$$-\tfrac{1}{4}Mw^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2 2\varphi - Mw\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m = -Mw \sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m (1+w\cos^2\varphi_m) =$$

$$= -Me^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m \frac{1-e^2\sin^2\varphi_m + e^2\cos^2\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2} =$$

$$= -M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m \frac{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2 - e^4\cos^4\varphi_m}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^2}.$$

En négligeant un terme du 8[e] ordre, on peut donc écrire pour cette expression:

$$-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m,$$

tandis que le terme négligé, qui doit être ajouté à (68), est:

$$+Me^6\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\varphi_m \cos^4\varphi_m + T_{10} \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

Le second terme qui fait partie de $\log q_1$ est:

$$-Mw\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\tfrac{1}{2}s' \sin^2\varphi_m.$$

Dans ce terme du sixième ordre nous pouvons remplacer w par une constante; pour la facilité du calcul, nous prenons la constante $\frac{e^2}{1-e^2}$ et négligeons ainsi un terme du 8[e] ordre, lequel doit être ajouté à (68); ce terme est:

$$-M\sin^2\tfrac{1}{2}\beta \sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m\left(w-\frac{e^2}{1-e^2}\right) = +Me^4\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m\cos^2\varphi_n + T_{10}.$$

En posant encore $\sin^2\tfrac{1}{2}s' = \sin^2\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\lambda + \sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m$, nous trouvons pour $\log q_1$:

$$\log q_1 = -M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m - M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\lambda -$$

$$-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m; \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

c'est la formule (25) de la section A.

Parmi les termes de $\log q_2$ se trouve $-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m$ $\sin^2\tfrac{1}{2}s'$, qu'on peut mettre sous la forme :

$$-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\left[\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m+\sin^2\tfrac{1}{2}\beta-\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\right];$$

le dernier de ces termes, savoir

$$+M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^4\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\beta,$$

est du 8e ordre et doit être ajouté à (69). Les autres termes, réunis à $-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m+M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m$, donnent, après une réduction simple :

$$\log q_2=-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m-M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^4\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m+$$
$$+M\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\beta\sin^2\varphi_m\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda\cos^2\varphi_m;\quad\ldots\ldots\ldots\;(73)$$

c'est la formule (26) de la section A.

§ 18. Pour juger du degré d'exactitude des formules ci-dessus développées, nous devons considérer les termes négligés du 8e ordre. Partageons l'ensemble de ces termes en trois groupes, les mêmes que pour les termes précédents, et mettons-les, en négligeant des termes du 10e ordre, sous la forme la plus simple; nous obtenons ainsi le tableau suivant. Les chiffres placés derrière chacun de ces termes en indiquent les plus grandes valeurs positives et négatives, pour une distance égale au dixième du rayon de l'équateur, ou 638 kilomètres, en parties de la dixième décimale, prise pour unité.

Termes du 8e ordre dans $\log q_1$:

$+\tfrac{1}{2}Me^4\sin^4\tfrac{1}{2}s'\sin^4\varphi_m\cos^4 A_m$	+ 0,60 — 0,00
$+Me^4\sin^4\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m\cos^2\varphi_m\cos^2 A_m$	+ 0,30 — 0,00
$+Me^6\sin^2\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m\cos^4\varphi_m\cos^2 A_m$	+ 0,48 — 0,00
$-Me^2\sin^6\tfrac{1}{2}s'\sin^2\varphi_m\cos^2 A_m$	+ 0,00 — 0,45

Termes du 8[e] ordre dans $log\, q_2$:

$-\frac{1}{2} M e^4 \sin^4 \frac{1}{2} s' \cos^4 \varphi_m \sin^4 A_m$	$+ 0{,}00 - 0{,}60$
$+ M e^4 \sin^4 \frac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m \cos^2 A_m$	$+ 0{,}08 - 0{,}00$
$- M e^2 \sin^6 \frac{1}{2} s' \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m$	$+ 0{,}00 - 0{,}45$
$+ M e^2 \sin^6 \frac{1}{2} s' \sin^2 A_m \cos^2 A_m$	$+ 0{,}11 - 0{,}00$
$+ M e^2 \sin^6 \frac{1}{2} s' \sin^4 A_m \cos^2 A_m$	$+ 0{,}07 - 0{,}00$

Termes du 8[e] ordre dans $log\, q_3$:

$+\frac{1}{4} M e^4 \sin^4 \frac{1}{2} s'(1 - 10 \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m) \cos^4 A_m$	$+ 0{,}30 - 0{,}45$
$+ M e^4 \sin^4 \frac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m \sin^2 A_m \cos^4 A_m$	$+ 0{,}02 - 0{,}00$
$- M e^4 \sin^4 \frac{1}{2} s' \cos^4 \varphi_m \sin^4 A_m \cos^2 A_m$	$+ 0{,}00 - 0{,}18$
$+\frac{1}{2} M e^4 \sin^4 \frac{1}{2} s' \sin^2 \varphi_m \cos^2 \varphi_m \cos^2 A_m$	$+ 0{,}15 - 0{,}00$
$-\frac{5}{8} M e^6 \sin^2 \frac{1}{2} s' \sin^2 2\varphi_m \cos 2\varphi_m \cos^2 A_m$	$+ 0{,}77 - 0{,}77$

En prenant les sommes de ces valeurs maxima et minima des termes du 8[e] ordre, on trouve :

$log\, q_1$	$+ 1{,}38$	$- 0{,}45$
$log\, q_2$	$+ 0{,}26$	$- 1{,}05$
$log\, q_3$	$+ 1{,}24$	$- 1{,}40$

Or, $log\, tg\, A_m$ contient $log\, q_1 - log\, q_2$; l'erreur la plus forte que pourrait y produire l'omission des termes du 8[e] ordre serait donc :

$$1{,}38 + 1{,}05 = 2{,}43,$$

si toutes les valeurs maxima étaient atteintes simultanément. Mais il s'en faut de beaucoup que tel soit le cas. Par exemple, des deux termes principaux qui entrent dans les sommes en question, avec les valeurs $+ 0{,}60$ et $- 0{,}60$, le premier acquiert cette valeur maximum pour $\varphi_m = 90°$, $A_m = 0$, conditions dans lesquelles le second s'annule ; le second prend sa plus forte valeur pour $\varphi_m = 0$, $A_m = 90°$, alors que le premier s'évanouit. L'influence totale de ces deux termes ne peut jamais dépasser 0,60,

de sorte qu'il faut déduire au moins 0,60 du chiffre 2,43 ci-dessus trouvé, dont il reste par conséquent tout au plus 1,43.

Si l'on considère maintenant que pour produire dans A_m une différence de 0'',0001 il doit y avoir dans la dixième décimale de $log\ tg\ A_m$ une différence de 4,21 unités, on voit de suite que l'omission des termes du huitième ordre ne peut pas donner lieu à une erreur d'une *demi-unité de la quatrième décimale de la seconde*, ou de 0'',00005. En réalité, cette erreur sera encore beaucoup moindre, car c'est seulement pour des angles de 45° que la différence de 0'',0001 résulte d'une différence de 4,21 unités de la dixième décimale du logarithme; pour d'autres azimuts, une pareille différence dans *log tg* donne dans l'angle une différence plus petite. Parmi les termes négligés dans $log\ q_1$ et $log\ q_2$, les principaux n'acquièrent leur valeur maximum que pour $A_m = 0$ ou $A_m = 90°$, c'est-à-dire, alors que leur influence sur A_m même est la plus faible possible. Il sera superflu, toutefois, de chercher à évaluer l'influence réelle des différents termes sur A_m, car il ressort déjà suffisamment, de ce qui précède, que, pour les distances en question, l'erreur est si petite qu'on peut hardiment la négliger dans tous les cas.

La valeur maximum de l'influence des termes négligés dans $log\ q_1$ et $log\ q_2$ sur la valeur de $log\ K$ est, comme on le reconnaît facilement, tout au plus égale au plus grand des deux termes, donc tout au plus égale à + 1,38 ou — 1,05; en y ajoutant la valeur maximum des termes qui ont seulement de l'influence sur $log\ K$, non sur A_m, (3e groupe), on trouve:

$$+ 1{,}38 + 1{,}24 = + 2{,}62,$$
$$- 1{,}05 - 1{,}40 = - 2{,}45.$$

Pas plus que les précédentes, et pour des raisons analogues, ces valeurs maxima ne seront atteintes. Pour ne citer qu'un exemple, les deux termes qui dans la somme + 2,62 figurent avec les valeurs 0,48 et 0,77, ne donnent jamais, réunis, la

valeur 0,48 + 0,77 = 1,25, mais tout au plus 0,90; de ce chef, le nombre + 2,62 est donc certainement déjà réduit à + 2,27.

Or, pour obtenir dans la corde une différence de un millimètre, il doit y avoir dans le logarithme une différence de 6,81 unités de la dixième décimale. En aucun cas, par conséquent, la corde ne pourra être affectée d'une erreur atteignant *un demi-millimètre.*

Somme toute, nous voyons que, pour la distance de 638 kilomètres, les termes du 8e ordre sont encore parfaitement négligeables.

Pour montrer l'influence que ces termes du 8e ordre ont dans l'exemple Berlin—Königsbergen, traité ci-dessus, nous donnons ici leurs valeurs en unités de la dixième décimale, savoir:

+ 0,006	— 0,022	— 0,008
+ 0,028	+ 0,022	+ 0,005
+ 0,038	— 0,041	— 0,009
— 0,021	+ 0,025	+ 0,028
	+ 0,020	+ 0,080
+ 0,051	+ 0,004	+ 0,096

L'influence sur $\log tg\, A_m$ est donc: + 0,051 — 0,004 = 0,047, correspondant à:

$$0'',00000092,$$

et l'influence sur $\log K$: + 0,041 + 0,096 = 0,137, correspondant à:

0,017 millimètre.

La valeur de $\frac{1}{2}\delta$ suivant la formule (66), c'est-à-dire l'erreur de $\frac{1}{2}\alpha$, est égale à:

$$0'',000021.$$

§ 19. La longueur de l'arc elliptique S entre les points A_1 et A_2 ne sera développée ici que jusqu'aux quantités de l'ordre $e^2 s^5$. Comme les deux arcs elliptiques $A_1 A_2$ et $A_2 A_1$ ne

diffèrent de la ligne géodésique que d'une quantité de l'ordre $e^4 s^5$, qui, même pour une distance de 1000 kilomètres, ne s'élève pas encore à un millimètre, nous n'avons à faire aucune distinction entre ces deux arcs.

Soit S_1 la longueur de l'arc de cercle mené par $A_1 A_2$ et ayant en A_1 la même tangente que la section normale en ce point, et soit R_1 le rayon de cet arc de cercle; on aura:

$$S_1 = R_1 s_1.$$

En substituant pour R_1 la valeur qui résulte de (37) lorsqu'on y remplace K par $2 R_1 \sin \frac{1}{2} s_1$, savoir:

$$R_1 = \frac{P}{\cos \Delta} \frac{\sin s' \cos \frac{1}{2} \delta}{2 \sin \frac{1}{2} s_1 \cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} \sigma},$$

nous trouvons:

$$S_1 = \frac{P}{\cos \Delta} s' \frac{\sin s'}{s'} \frac{\frac{1}{2} s_1}{\sin \frac{1}{2} s_1} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} s} \frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \sigma}.$$

Eu égard au degré d'exactitude ci-dessus spécifié, nous pouvons remplacer $\frac{\cos \frac{1}{2} \delta}{\cos \frac{1}{2} \sigma}$ par l'unité; quant à l'expression $\frac{\sin s'}{s'}$ $\frac{\frac{1}{2} s_1}{\sin \frac{1}{2} s_1} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} s}$, il suffit de la développer jusqu'aux quantités de l'ordre s^4, ce qui en réalité revient à développer jusqu'aux quantités de l'ordre $e^2 s^4$, vu que pour $e^2 = 0$ on a $s = s_1 = s'$ et que par conséquent tous les termes du développement ont au moins e^2 en facteur.

Nous trouvons ainsi:

$$\frac{\sin s'}{s'} \frac{\frac{1}{2} s_1}{\sin \frac{1}{2} s_1} \frac{1}{\cos \frac{1}{2} s} = 1 - \tfrac{1}{6} s'^2 + \tfrac{1}{24} s_1^2 + \tfrac{1}{8} s^2,$$

ou, en remplaçant s_1 par $s - \sigma$ et en négligeant le terme σ^2, qui est de l'ordre $e^4 s^4$:

$$1 - \tfrac{1}{6} s'^2 + \tfrac{1}{6} s^2 - \tfrac{1}{12} s \sigma.$$

Pour s^2 on tire de (34) la valeur $s'^2 \cos^2 \Delta$ et pour $s\,\sigma$ de (33) la valeur $4\,\frac{Q}{P} \cos^2 \Delta$, ce qui transforme l'expression précédente en:

$$1 - \tfrac{1}{6}\, s'^2 \sin^2 \Delta - \tfrac{1}{3}\, \frac{Q}{P} \cos^2 \Delta,$$

de sorte que nous obtenons pour S_1:

$$S_1 = \frac{P}{\cos \Delta}\, s' \left(1 - \tfrac{1}{6}\, s'^2 \sin^2 \Delta - \tfrac{1}{3}\, \frac{Q}{P} \cos^2 \Delta\right) \quad . \; . \; . \quad (74)$$

Pour l'arc de cercle S_2 qui passe par les mêmes points A_1 et A_2, mais qui a en A_2 la même tangente que la section normale en ce point, on trouve, d'une manière analogue:

$$S_2 = \frac{P}{\cos \Delta}\, s' \left(1 - \tfrac{1}{6}\, s'^2 \sin^2 \Delta + \tfrac{1}{3}\, \frac{Q}{P} \cos^2 \Delta\right) \quad . \; . \; . \quad (75)$$

Il résulte de ces formules que les deux arcs de cercle diffèrent seulement par le terme $\frac{1}{3}\, Q\, s' \cos \Delta$, qui est de l'ordre $e^2\, s^4$ et dont nous devons par conséquent tenir compte.

Dans le développement de ce terme, nous pouvons négliger, relativement à l'unité, tous les termes du premier ordre en s, de sorte que toutes les quantités nécessaires n'ont besoin d'être calculées que par première approximation.

Pour l'arc elliptique S, il résulte alors des équations (74) et (75) elles-mêmes:

$$S = \frac{P}{\cos \Delta}\, s',$$

ou

$$s' = \frac{S \cos \Delta}{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (76)$$

La valeur de P est donnée par (54); pour faire disparaître toutefois l'angle A'_m entre les parenthèses, nous substituerons dans

$$\cos \Delta = \cos A_m \cos A'_m + \sin A_m \sin A'_m$$

pour $sin\,A_m$ sa valeur d'après (62), savoir:

$$sin\,A_m = \frac{cos\,A_m\,tg\,A'_m}{1 - w\,cos^2\,\varphi_m},$$

ce qui donne:

$$cos\,\Delta = \frac{cos\,A_m}{cos A'_m} \cdot \frac{1 - w\,cos^2\,\varphi_m cos^2 A'_m}{1 - w\,cos^2\,\varphi_m}$$

et transforme (54) en:

$$P = N_m\,(1 - w\,cos^2\,\varphi_m)\,cos\,\Delta\,\frac{cos A'_m}{cos\,A_m} = R_m\,cos\,\Delta\,\frac{cos A'_m}{cos\,A_m}.$$

Par la substitution de cette valeur, (76) devient:

$$s' = \frac{S}{R_m}\,\frac{cos\,A_m}{cos A'_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

De (55) on déduit, en négligeant par rapport à l'unité tous les termes de l'ordre s:

$$\frac{Q}{P} = -\tfrac{1}{8}\,w\,\beta\,s'^2\,sin\,\varphi_m\,cos\,\varphi_m,$$

ou, en remplaçant β par $s'\,cos\,A'_m$ et en ayant égard à (77):

$$\frac{Q}{P} = -\tfrac{1}{8}\,w\,\frac{S^3}{R_m^3}\,sin\,\varphi_m\,cos\,\varphi_m\,\frac{cos^3\,A_m}{cos^2\,A'_m}.$$

Cette expression étant multipliée par le carré de (65), on obtient:

$$\frac{Q}{P}\,cos^2\,\Delta = -\tfrac{1}{8}\,\frac{S^3}{R_m^3}\,w\,sin\,\varphi_m\,cos\,\varphi_m\,cos\,A_m\,(1 - w\,cos^2\,\varphi_m\,sin^2 A_m)^2,$$

et finalement, par la substitution dans (74) et (75):

$$S_1 = \frac{P}{cos\Delta}\,s'(1 - \tfrac{1}{6}s'^2 sin^2\,\Delta) + \tfrac{1}{24}\,\frac{S^4}{R_m^3}\,w sin\varphi_m cos\varphi_m cos A_m (1 - w cos^2 \varphi_m sin^2 A_m)^2. \quad (78)$$

$$S_2 = \frac{P}{cos\Delta}\,s'(1 - \tfrac{1}{6}s'^2 sin^2\,\Delta) - \tfrac{1}{24}\,\frac{S^4}{R_m^3}\,w sin\varphi_m cos\varphi_m cos A_m (1 - w cos^2 \varphi_m sin^2 A_m)^2. \quad (78')$$

§ 20. Les longueurs des arcs de cercle qui viennent d'être développés ne concordent par avec celle de l'arc elliptique S; pour en déduire celui-ci, il y a encore une correction à introduire. Pour la déterminer, nous chercherons d'abord les différences entre un arc elliptique situé dans le méridien et les deux arcs de cercle qui passent par ses extrémités et ont respectivement en un de ces points la même tangente que l'arc elliptique.

En posant $\lambda = 0$, ce qui donne $A_m = 0$, $A'_m = 0$, $\Delta = 0$ et $s' = \beta$, et en remarquant que de (19) et (6) il suit:

$$P = \frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2} s'} \frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\sin \frac{1}{2} s'},$$

nous trouvons pour les deux arcs de cercle en question, d'après les formules (78) et (78'):

$$S_1 = \left(\frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2} \beta} \right) \beta + \frac{1}{24} \frac{S^4}{R_m^3} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m,$$

et

$$S_2 = \left(\frac{N_2 + N_1}{2} - \frac{p \cos \varphi_m}{2 \sin \frac{1}{2} \beta} \right) \beta - \frac{1}{24} \frac{S^4}{R_m^3} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m$$

ou, en ayant égard à (47):

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= R_m \beta \left[1 + \tfrac{1}{8} w \beta^2 (\cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{4} w \sin^2 2\varphi_m) \right] + \tfrac{1}{24} \frac{S^4}{R_m^3} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m \\ S_2 &= R_m \beta \left[1 + \tfrac{1}{8} w \beta^2 (\cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{4} w \sin^2 2\varphi_m) \right] - \tfrac{1}{24} \frac{S^4}{R_m^3} w \sin \varphi_m \cos \varphi_m \end{aligned}\right\} .(79)$$

La longueur de l'arc elliptique est donnée par l'expression:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}\beta}^{+\frac{1}{2}\beta} R \, dx,$$

dans laquelle R représente le rayon de courbure du méridien à la latitude $\varphi = \varphi_m + x$.

A l'aide de la série de Taylor on trouve:

$$R = R_m + x\,R'_m + \tfrac{1}{2}x^2\,R''_m + \tfrac{1}{6}x^3\,R'''_m + \tfrac{1}{24}x^4\,R^{IV}_m + \text{etc.}$$

d'où il suit par intégration:

$$S = \beta\,R_m + \tfrac{1}{24}\beta^3\,R'_m + \tfrac{1}{1920}\beta^5\,R^{IV}_m + \text{etc.} =$$

$$= R_m\,\beta\left[1 + \tfrac{1}{24}\beta^2\,\frac{R''_m}{R_m} + \tfrac{1}{1920}\beta^4\,\frac{R^{IV}_m}{R_m} + \text{etc.}\right]$$

Par la différentiation on obtient ensuite:

$$R'_m = \tfrac{3}{2}\,R_m\,w\,sin\,2\,\varphi_m$$

$$R''_m = 3\,R_m\,w\,cos\,2\,\varphi_m + \tfrac{15}{4}\,R_m\,w^2\,sin^2\,2\,\varphi_m$$

et par conséquent, jusqu'aux quantités de l'ordre $e^2\,\beta^5$ près:

$$S = R_m\,\beta\left[1 + \tfrac{1}{8}\beta^2\,w\,(cos\,2\,\varphi_m + \tfrac{5}{4}\,w\,sin^2\,2\,\varphi_m)\right] \;.\;.\; (80)$$

En retranchant de cette valeur les expressions (79), nous avons la correction qui doit être appliquée pour un arc du méridien, savoir:

$$S - S_1 = -\tfrac{1}{24}\,\frac{S^4}{R^3_m}\,w\,sin\varphi_m\,cos\varphi_m = -\tfrac{1}{24}\,\frac{S^4}{a^3}\,\frac{e^2(1-e^2 sin^2\varphi_m)^{\frac{7}{2}} sin\varphi_m\,cos\varphi_m}{(1-e^2)^3} \;.\;.\;.\; (81)$$

$$S - S_2 = +\tfrac{1}{24}\,\frac{S^4}{R^3_m}\,w\,sin\varphi_m\,cos\varphi_m = +\tfrac{1}{24}\,\frac{S^4}{a^3}\,\frac{e^2(1-e^2 sin^2\varphi_m)^{\frac{7}{2}} sin\varphi_m\,cos\varphi_m}{(1-e^2)^3} \;.\;.\; (81')$$

§ 21. Pour trouver maintenant la correction exigée par la formule (78), il faut, dans l'expression (81), remplacer a et e par le demi-grand axe a' et l'excentricité e' de la section normale $A_1\,A_2$, et φ_m par la moyenne φ'_m des angles que les deux normales en A_1 et A_2 à cette section normale font avec le grand axe. En opérant cette substitution, il est toutefois permis de négliger partout les quantités du premier ordre, par

rapport aux quantités de l'ordre zéro. Cela observé, on trouve facilement, à l'aide des formules (5), (6), (7) et (8) données aux pages 10 et 11 du Mémoire de M. J. J. Baeijer: *Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche*, Berlin, 1862, les expressions suivantes :

$$a' = \frac{a\sqrt{1-e^2+e^2 \cos^2\varphi_m \cos^2 A_m}}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2\varphi_m)(1-e^2\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m)}}$$

$$e'^2 = \frac{e^2(1-\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m)}{1-e^2\cos^2\varphi_m \sin^2 A_m}$$

$$1-e'^2 \sin^2\varphi'_m = \frac{1-e^2+e^2\cos^2\varphi_m\cos^2 A_m}{1-e^2\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m}$$

$$1-e'^2 = \frac{1-e^2}{1-e^2\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m}$$

$$\sin\varphi'_m\cos\varphi'_m = \frac{tg\,\varphi'_m}{1+tg^2\varphi'_m} = \frac{\sin\varphi_m\cos\varphi_m\cos A_m}{\cos^2\varphi_m\cos^2 A_m+\sin^2\varphi_m} = \frac{\sin\varphi_m\cos\varphi_m\cos A_m}{1-\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m},$$

et, en introduisant ces expressions dans (81) :

$$S-S_1 = -\tfrac{1}{24}S^4\frac{e^2\sin\varphi_m\cos\varphi_m\cos A_m(1-e^2+e^2\cos^2\varphi_m\cos^2 A_m)^2(1-e^2\sin^2\varphi_m)^{\frac{3}{2}}}{a^3(1-e^2)^3} =$$

$$= -\tfrac{1}{24}\frac{S^4}{R^3_m} w \sin\varphi_m\cos\varphi_m\cos A_m(1-w\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m)^2.$$

De (81′) on obtient d'une manière analogue:

$$S-S_2 = +\tfrac{1}{24}\frac{S^4}{R^3_m} w\sin\varphi_m\cos\varphi_m\cos A_m(1-w\cos^2\varphi_m\sin^2 A_m)^2$$

Ces corrections étant appliquées aux formules (78) et (78′), celles-ci donnent l'une et l'autre pour l'arc elliptique, aux quantités de l'ordre $e^2 s^5$ près:

$$S = \frac{P}{\cos\Delta} s'(1-\tfrac{1}{6}s'^2\sin^2\Delta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

§ 22. A l'aide des expressions qui viennent d'être obtenues pour la longueur de l'arc, nous pouvons maintenant démontrer facilement les formules (31) — (34) et (38), (39) de la section A du présent Mémoire. Prenant en considération les formules relatives à la solution sphérique, et faisant attention que, moyennant omission de termes de l'ordre $e^2 s^2$, la tangente de A_m est égale à la tangente de A'_m multipliée par $\frac{N_m}{R_m}$, nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{aligned} R \sin \tfrac{1}{2} s_0 \sin A_m &= N_m \sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m \\ R \sin \tfrac{1}{2} s_0 \cos A_m^0 &= R_m \sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda \\ S_0 &= R s_0 \end{aligned}\right\} \dots\dots (83)$$

Ce sont là les formules (31), (32) et (33) de la section A, sauf l'indice zéro, que nous avons introduit afin d'établir une distinction entre les valeurs exactes et les valeurs approchées suivant les formules ci-dessus.

La valeur exacte de A_m se trouve par la division des formules (39), si l'on tient compte de ce que les formules (51) et (52), en connexion avec (59) et (60), donnent, aux quantités de l'ordre $e^2 s^4$ près:

$$\left.\begin{aligned} P + L \operatorname{ctg} A'_m + Q \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{ctg} A'_m &= N_m \Big[1 + \tfrac{1}{8} \beta^2 w (\cos 2\varphi_m + \tfrac{3}{4} w \sin^2 2\varphi_m) - \\ &\qquad - \tfrac{1}{4} \beta^2 w \sin^2 \varphi_m \Big] = N_m (1 + \eta_1) \\ P - L \operatorname{tg} A'_m - Q \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \delta \operatorname{tg} A'_m &= R_m \Big[1 + \tfrac{1}{8} \beta^2 w (\cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{4} w \sin^2 2\varphi_m) - \\ &\qquad - \tfrac{1}{4} \lambda^2 \frac{e^2}{1-e^2} \cos^4 \varphi_m \Big] = R_m (1 + \eta_2) \end{aligned}\right\} ; (84)$$

on trouve ainsi:

$$\operatorname{tg} A_m = \frac{N_m}{R_m} \frac{\sin \tfrac{1}{2} \lambda \cos \varphi_m}{\sin \tfrac{1}{2} \beta \cos \tfrac{1}{2} \lambda} (1 + \eta_1 - \eta_2), \dots\dots (85)$$

tandis que de (83) il suit:

$$tg\,A_m^0 = \frac{N_m}{R_m}\,\frac{sin\,\tfrac{1}{2}\lambda\,cos\,\varphi_m}{sin\tfrac{1}{2}\beta\,cos\,\tfrac{1}{2}\lambda}.$$

Par la combinaison de ces deux formules, on obtient:

$$tg\,A_m = tg\,A_m^0\,(1 + \eta_1 - \eta_2),$$

et de celle-ci on déduit pour la différence de A_m et A_m^0, différence que nous représenterons par ε:

$$tg\,\varepsilon = tg(A_m - A_m^0) = \frac{tgA_m - tgA_m^0}{1 + tgA_m\,tgA_m^0} = (\eta_1 - \eta_2)\,sin\,A_m^0\,cos\,A_m^0, \quad (86)$$

d'où résulte immédiatement la formule (12) de la section A pour l'erreur de A_m^0.

Au moyen des formules (83) et (4), nous trouvons:

$$R_m\,sin\,\tfrac{1}{2}\,s'\,cos\,A'_m = R\,sin\,\tfrac{1}{2}\,s_0\,cos\,A_m^0,$$

et à l'aide de celle-ci:

$$s' = \frac{\tfrac{1}{2}\,s'}{sin\,\tfrac{1}{2}s'}\;\frac{sin\,\tfrac{1}{2}\,s_0}{\tfrac{1}{2}\,s_0}\,s_0\,\frac{sin\,\tfrac{1}{2}\,s'}{sin\,\tfrac{1}{2}\,s_0} = s_0\,(1 + \tfrac{1}{24}\,s'^2 - \tfrac{1}{24}\,s_0^2)\,\frac{R\,cos\,A_m^0}{R_m cos A'_m} =$$

$$= s_0\,\frac{R}{R_m}\,(1 + \tfrac{1}{24}\,s'^2 - \tfrac{1}{24}\,s_0^2)\,\frac{cos\,A_m}{cos A'_m}\,\frac{cos\,A_m^0}{cos\,A_m}.$$

En posant maintenant $A_m = A'_m + \Delta = A_m^0 + \varepsilon$, on obtient, à l'aide de (27), (84) et (86):

$$\frac{cos\,(A'_m + \Delta)}{cos\,A'_m}\,\frac{cos\,A_m^0}{cos\,(A_m^0 + \varepsilon)} = \frac{cos\,\Delta\,(1 - tg\Delta\,tgA'_m)}{cos\,\varepsilon\,(1 - tg\,\varepsilon\,tg\,A_m^0)} = \frac{cos\Delta}{P}\,\frac{P - L\,tg\,A'_m}{1 - (\eta_1 - \eta_2) sin^2 A_m^0} =$$

$$= \frac{cos\Delta}{P}\,\frac{R_m\,(1 + \eta_2)}{1 - (\eta_1 - \eta_2) sin^2\,A_m^0} = \frac{R_m\,cos\,\Delta}{P}\left[1 + \eta_1\,sin^2\,A_m^0 + \eta_2\,cos^2\,A_m^0\right].$$

Pour s'^2 on tire ensuite de (3) en (4), en prenant la somme des carrés:

$$s'^2 = \beta^2 + \lambda^2 \cos^2 \varphi_m,$$

et de même pour s_0^2, de (83):

$$s_0^2 = \beta^2 \frac{R_m^2}{R^2} + \lambda^2 \cos^2 \varphi_m \frac{N_m^2}{R^2}.$$

L'introduction de ces valeurs dans l'expression obtenue ci-dessus pour s' donne:

$$s' = s_0 \frac{R \cos \Delta}{P} \left[1 + \eta_1 \sin^2 A_m^0 + \eta_2 \cos^2 A_m^0 + \tfrac{1}{24} \beta^2 \left(1 - \frac{R_m^2}{R^2}\right) + \tfrac{1}{24} \lambda^2 \cos^2 \varphi_m \left(1 - \frac{N_m^2}{R^2}\right) \right]$$

et, en substituant cette expression dans (82), on trouve pour l'arc S, si l'on tient compte aussi de (83):

$$S = S_0 \left[1 + \eta_1 \sin^2 A_m^0 + \eta_2 \cos^2 A_m^0 + \tfrac{1}{24} \beta^2 \left(1 - \frac{R_m^2}{R^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{24} \lambda^2 \cos^2 \varphi_m \left(1 - \frac{N_m^2}{R^2}\right) - \tfrac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta \right] \quad . \; . \; . \; (87)$$

De (69) il suit encore:

$$s' \sin \Delta = \frac{e^2}{1 - e^2} s' \sin A'_m \cos^2 \varphi_m \cos A_m,$$

ou, à l'aide de (3):

$$s' \sin \Delta = \frac{e^2}{1 - e^2} \lambda \cos^3 \varphi_m \cos A_m.$$

Si cette valeur, ainsi que les valeurs de η_1 et η_2 tirées de (84), sont transportées dans (87), on retombe sur la formule (34) de la section A pour l'erreur $S_0 - S$ dans S_0.

§ 23. Pour tenir compte des termes de l'ordre $e^2 s^2$, de la manière dont cela a eu lieu au § 7, nous pouvons écrire, en ayant égard à (39) et (85):

$$\left.\begin{aligned} S \sin A_m &= 2\, q\, N_m \sin \tfrac{1}{2}\lambda \cos \varphi_m (1+\eta_1) \\ S \cos A_m &= 2\, q\, R_m \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\lambda (1+\eta_2), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (88)$$

où q est un facteur encore à déterminer. De ces équations (88), combinée avec (3), il résulte pour S:

$$S = 2\, q\, N_m \sin \tfrac{1}{2} s' \frac{\sin A'_m}{\sin A_m}(1+\eta_1) = \frac{2\, q\, N_m \sin \tfrac{1}{2} s' (1+\eta_1)}{\cos \Delta (1 + tg \Delta \, ctg\, A'_m)},$$

ou, en substituant pour $tg\, \Delta$ sa valeur tirée de (58) et en ayant égard à (84):

$$S = \frac{2\, P\, q N_m \sin \tfrac{1}{2} s' (1+\eta_1)}{\cos \Delta\, (P + L\, ctg\, A'_m)} = 2 \frac{P}{\cos \Delta}\, q \sin \tfrac{1}{2} s'.$$

Cette expression étant égalée à la valeur de S suivant (82), on trouve immédiatement pour q:

$$q = \frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} (1 - \tfrac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta),$$

ce qui transforme les formules (88) en:

$$\left.\begin{aligned} S \sin A_m &= 2\, N_m \sin \tfrac{1}{2}\lambda \cos \varphi_m \frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} (1 + \eta_1 - \tfrac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta) \\ S \cos A_m &= 2\, R_m \sin \tfrac{1}{2}\beta \cos \tfrac{1}{2}\lambda \frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} (1 + \eta_2 - \tfrac{1}{6} s'^2 \sin^2 \Delta) \end{aligned}\right\} \ldots (89)$$

Pour adapter ces formules aux courtes distances, nous posons:

$$\sin \tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2}\lambda (1 - \tfrac{1}{24}\lambda^2)$$
$$\sin \tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\beta (1 - \tfrac{1}{24}\beta^2)$$
$$\frac{\tfrac{1}{2} s'}{\sin \tfrac{1}{2} s'} = 1 + \tfrac{1}{24} s'^2 = 1 + \tfrac{1}{24}\beta^2 + \tfrac{1}{24}\lambda^2 \cos^2 \varphi_m,$$

en négligeant des termes de l'ordre β^4 et λ^4; au § 8, nous avons déjà examiné en détail quel est l'effet de l'omission de ces termes et entre quelles limites les formules peuvent, par suite, être employées. Par la substitution des valeurs que nous

venons de poser, les formules précédentes deviennent:

$$\left.\begin{aligned} S\sin A_m &= N_m \lambda \cos\varphi_m (1 - \tfrac{1}{24}\lambda^2 \sin^2\varphi_m + \tfrac{1}{24}\beta^2 + \eta_1 - \tfrac{1}{6}s'^2 \sin^2\Delta)) \\ S\cos A_m &= R_m \beta \cos\tfrac{1}{2}\lambda (1 + \tfrac{1}{24}\lambda^2 \cos^2\varphi_m + \eta_2 - \tfrac{1}{6}s'^2 \sin^2\Delta) \end{aligned}\right\} . (90)$$

Pour η_1 nous pouvons écrire, en négligeant un terme de l'ordre $\beta^2 e^6$ (voir form. (71)):

$$\eta_1 = -\tfrac{1}{4}\beta^2 \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 \varphi_m + \tfrac{1}{8}\beta^2 w \cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{32}\beta^2 w^2 \sin^2 2\varphi_m$$

tandis que η_2 est égal à:

$$\eta_2 = -\tfrac{1}{4}\lambda^2 \frac{e^2}{1-e^2} \cos^4 \varphi_m + \tfrac{1}{8}\beta^2 w \cos 2\varphi_m + \tfrac{5}{32}\beta^2 w^2 \sin^2 2\varphi_m.$$

En ne tenant compte que des termes de l'orde $\beta^2 e^2$, on peut dans le terme $\frac{1}{8}\beta^2 w \cos 2\varphi_m$ remplacer w par la constante $\frac{e^2}{1-e^2}$, ce qui revient à négliger:

$$-\tfrac{1}{8}\beta^2 \frac{e^4 \cos^2 \varphi_m \cos 2\varphi_m}{(1-e^2)(1-e^2 \sin^2\varphi_m)};$$

le terme suivant,

$$\tfrac{5}{32}\beta^2 w^2 \sin^2 2\varphi_m,$$

ainsi que le terme

$$\tfrac{1}{6}s'^2 \sin^2\Delta = \tfrac{1}{6}\lambda^2 \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \cos^4\varphi \cos^2 A_m,$$

sont du même ordre et peuvent donc être également négligés. Ces trois termes influent seulement sur la distance, non sur A_m; leur influence maximum sur la distance, pour $S = 100000$ mètres, est respectivement de 0,139, 0,173 et 0,046 millimètre; leur influence collective s'élève tout au plus à 0,178 millimètre. Pour une distance de $S = 200000$ mètres, leur influence devient 8 fois plus grande, donc égale à 1,15, 1,39 et 0,35 millimètres; leur influence collective atteint alors, tout au plus, 1,46 milli-

mètres. On peut donc négliger ces termes sans qu'il en résulte, sur une distance de 200000 mètres, une erreur de plus de 2 millimètres. Or, par leur suppression, les formules (90) sont transformées en :

$$\left.\begin{aligned} S\sin A_m &= N_m \lambda \cos\varphi_m \left[1 - \tfrac{1}{24}\lambda^2 \sin^2\varphi_m + \tfrac{1}{24}\left(1 - 6\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2\varphi_m\right)\beta^2 + \right. \\ &\qquad \left. + \tfrac{1}{8}\frac{e^2}{1-e^2}\beta^2\cos 2\varphi_m\right] \\ S\cos A_m &= R_m \beta \cos\tfrac{1}{2}\lambda \left[1 + \tfrac{1}{24}\left(1 - 6\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_m\right)\lambda^2\cos^2\varphi_m + \tfrac{1}{8}\frac{e^2}{1-e^2}\beta^2\cos 2\varphi_m\right] \end{aligned}\right\} . (91)$$

Il n'y a plus qu'à exprimer λ et β en secondes, et à prendre les logarithmes, pour retrouver les formules (38) et (39) de la section A.

Delft, Janvier 1882.

CONTRIBUTION À L'HISTOIRE DU DÉVELOPPEMENT DES REPTILES,

PAR

C. K. HOFFMANN.

(Avec les Planches nos. 4 et 5).

Sur la structure de l'œuf des Reptiles nous possédons déjà des communications très détaillées et très exactes de MM. Braun (6), Eimer (4), Gegenbaur (1), Ludwig (3) et Waldeyer (2).

Parlant de l'ovaire des Reptiles, M. Waldeyer dit que chez les animaux adultes du genre *Lacerta* il n'a jamais vu de trace de la formation d'un follicule à la surface de l'épithélium proligère. Néanmoins, il ne doute pas que "les phénomènes en question ne puissent être tout à fait analogues à ceux qu'il a décrits précédemment chez les Oiseaux".

M. Braun, au contraire, déclare n'avoir rencontré aucun ovaire où il ne fût possible d'observer des stades de la formation de follicules ovulaires, quand l'ovaire était étudié sur des coupes transversales. Cela s'applique, suivant lui, aussi bien aux animaux adultes qu'aux jeunes; seulement, ajoute-t-il, il faut procéder à l'examen au printemps ou en été.

Mes propres observations, qui ont porté principalement sur l'œuf du *Lacerta agilis*, s'accordent entièrement avec celles de

M. Braun; comme lui, toutefois, je n'ai plus trouvé d'indices de la formation de follicules ovulaires en automne et aux approches de l'hiver, de sorte qu'il est extrêmement probable que les recherches de M. Waldyer, sur ce point, ont eu lieu dans une saison défavorable.

Les œufs les plus petits que j'aie eu l'occasion d'étudier avaient un diamètre de 0,04 mm.; ils étaient entourés d'un épithélium granuleux bien distinct. Je ne puis dire positivement si, chez les œufs de cette dimension, l'épithélium granuleux consiste en une couche unique. Il est certain que dans les œufs plus développés la granuleuse est formée de plusieurs couches distinctes; des œufs dont le diamètre mesurait 1,5 mm. à 2 mm. avaient un épithélium granuleux composé de quatre ou cinq couches. Chez les œufs encore plus grands, au contraire, surtout chez ceux qui atteignent un diamètre de 6—7 millimètres, la granuleuse est de nouveau réduite à une seule couche de cellules (voir Pl. 4, fig. 6).

Ce qui précède est tout à fait conforme aux résultats communiqués par MM. Waldeyer (2), Gegenbaur (1) Eimer (4) et Braun (6).

M. Waldeyer dit, à propos de l'épithélium des follicules ovulaires de *Lacerta agilis*, "qu'il consiste en plusieurs couches, du moins chez les follicules petits et moyens, d'un diamètre de 0,25—2 mm. Quand on examine les follicules à l'état frais", continue-t-il, "on trouve que les cellules internes sont grandes, arrondies, pâles, avec un noyau apparent et des nucléoles à contours extrêmement nets et distincts, ce qui leur donne un aspect caractéristique. Entre ces grandes cellules, on en voit une foule de plus petites, qui atteignent à peine la moitié du diamètre des premières. Dans les préparations durcies, ces petites cellules occupent la couche extérieure et confinent immédiatement à la paroi, de tissu connectif, du follicule." En ce qui concerne les œufs plus gros, M. Waldeyer dit que, "entre la membrane vitelline et la paroi de tissu connectif du follicule, il ne reste qu'une seule assise de petites cellules aplaties."

Déjà antérieurement, M. Gegenbaur avait reconnu que dans les œufs encore petits de *Lacerta* l'épithélium folliculaire est composé de plus d'une couche; "chez des œufs de 2‴, dit-il, j'ai distinctement vu une pareille pluralité de couches dans une partie de l'épithélium" (granuleux). MM. Eimer et Braun s'expriment à peu près de la même manière.

La vésicule germinative est toujours d'une grandeur remarquable chez les Reptiles; dans des œufs ne présentant encore qu'un diamètre de 0,040 mm., le diamètre de la vésicule germinative était de 0,018 mm.; chez des œufs de 0,090 mm., la vésicule germinative mesurait 0,036 mm. Son contenu est parfaitement limpide et enveloppe un nucléole assez gros et très brillant; la paroi de la vésicule offre distinctement un double contour.

Dès que les œufs commencent à grossir, on trouve, au lieu de la tache germinative jusqu'ici simple et assez grande, une quantité de taches plus petites; chez des œufs qui avaient atteint un diamètre de 1,2 mm. et dont la vésicule germinative mesurait 0,15 mm., j'ai vu sur des coupes transversales 8 à 10 petites taches germinatives, qui avaient un diamètre de 0,004 mm. à 0,005 mm. et qui étaient réunies en un petit amas au centre de la vésicule germinative. Tout autour de cet amas de petites taches germinatives, on remarquait encore un très grand nombre de globules beaucoup plus petits, qui vers la péripherie s'atténuaient indéfiniment, jusqu'à disparaitre enfin tout à fait. Le reste du contenu de la vésicule germinative — le suc nucléaire — avait encore l'aspect d'un liquide limpide.

Quand les œufs continuent à grossir, la vésicule germinative étend également ses dimensions, et simultanément on voit augmenter le nombre des taches germinatives, qui alors se groupent bientôt en rangées plus ou moins régulières au bord de la partie périphérique de la vésicule germinative, phénomène qui a été exactement décrit par M. Eimer et sur lequel M. Gegenbaur avait déjà antérieurement fixé l'attention.

Vers l'époque de la maturité sexuelle de l'œuf, la vésicule germinative commence à changer de place, en se portant du

centre de l'œuf, position qu'elle occupait jusqu'alors, vers la périphérie. En même temps, les taches germinatives diminuent progressivement en nombre et en grandeur, puis elles semblent disparaître complètement, ce qui doit sans doute être attribué à ce qu'elles se redissolvent dans le suc nucléaire. Finalement, la vésicule germinative vient s'appliquer immédiatement contre la *zona radiata*, probablement pour y subir bientôt la métamorphose en fuseau nucléaire.

Au sujet de l'existence d'un micropyle dans l'œuf des Reptiles, et en particulier dans celui du *Lacerta agilis*, je ne saurais rien affirmer. A différentes reprises j'ai essayé de faire, sur des œufs approchant de la maturité sexuelle, des séries de coupes à travers la partie où se trouvait, en contact immédiat avec la *zona radiata*, la vésicule germinative; mais, en dépit de toutes les peines prises pour obtenir des préparations convaincantes, je n'ai pas réussi. On rencontre ici des difficultés spéciales, que je ne suis pas encore parvenu à surmonter, et ces difficultés sont les suivantes. Quel que soit le liquide employé pour durcir les œufs, toujours le contenu de la vésicule germinative se ratatine beaucoup plus fortement que la couche de vitellus formateur qui l'entoure, d'où il résulte que la vésicule germinative, après l'opération, se trouve située dans une cavité (de formation artificielle, bien entendu). Si alors on pratique une série de coupes transversales, la *zona radiata* oppose, dès que le scalpel est arrivé à la place occupée par la susdite cavité, une très faible résistance, de sorte que souvent elle s'y déchire, ou que du moins elle y subit toujours un renfoncement plus ou moins considérable. Il est très probable pourtant que chez les Reptiles, directement vis-à-vis de la place où se trouve le noyau transporté vers la périphérie, il existe un micropyle, car en cet endroit on observe toujours, même à l'aide d'une simple loupe, une dépression patelliforme. Sur la Pl. 4, fig. 8, j'ai représenté une coupe d'un œuf de *Lacerta agilis*, passant par la partie où était située la vésicule germinative après sa migration vers la périphérie. Les nucléoles paraissaient déjà

être tous dissous dans le suc nucléaire, du moins on ne pouvait plus les distinguer; la membrane nucléaire, encore nettement visible çà et là, était fortement ratatinée et plissée. Immédiatement autour du noyau, on trouve une couche de protoplasme finement granuleux, presque dépourvu de globules deutoplasmiques. A partir de là, en allant vers l'intérieur et vers les côtés, le nombre des globules de deutoplasme augmente graduellement, en même temps qu'ils deviennent plus gros, tandis que le protoplasme se raréfie de plus en plus et finit par faire entièrement place aux globules vitellins. Là où la *zona radiata* fait face au noyau, elle est notablement plus mince qu'ailleurs. D'après les observations de MM. Kupffer et Benecke (7), "l'œuf ovarien globuleux de *Lacerta agilis* perd sa grande vésicule germinative avant de pénétrer dans l'oviducte." Très probablement il se formera ici, tout comme je l'ai montré chez les Poissons osseux (15), un fuseau nucléaire aux dépens d'une partie du contenu de la vésicule germinative.

Encore un mot au sujet du soi-disant épithélium interne de l'œuf des Reptiles. On sait que M. Clark (*Embryology of the Turtle*, dans: L. Agassiz, *Contributions to the natural history of the United States of America*, Vol. II, Boston, 1857) a cherché à établir que dans l'œuf des Tortues, à la face interne de la *zona radiata*, il existerait encore une enveloppe spéciale, l'épithélium dit interne. M. Gegenbaur (1) a contesté l'existence d'une pareille couche épithéliale, aussi bien chez les Tortues que chez les Lézards, les Serpents et les Crocodiles. Ensuite, M. Eimer (4) a de nouveau soutenu la réalité de cet épithélium interne ou membrane embryonnaire, réalité que, de son côté, M. Ludwig (3) a de nouveau niée. Pour moi, je dois me rallier sans réserve à l'opinion de M. Gegenbaur et de M. Ludwig, que dans l'œuf non fécondé des Reptiles il n'existe pas de semblable membrane.

La *zona radiata* ne forme, dans l'œuf du *Lacerta agilis*, qu'une membrane très mince: je lui ai trouvé, en moyenne, une épaisseur de 0,012 mm. Selon toute probabilité, cette mem-

brane est une sécrétion de l'œuf lui-même et doit donc être considérée comme membrane vitelline. En faveur de cette interprétation plaide le fait que, vers l'extérieur, c'est-à-dire du côté de la granuleuse, la *zona radiata* est nettement limitée, tandis qu'en dedans ses limites sont si peu tranchées qu'il est souvent impossible de dire où elle s'arrête et où commence le contenu de l'œuf.

Sur le processus de la segmentation, nous possédons deux communications, l'une de MM. Kupffer et Benecke (7), l'autre de M. Balfour (8). La première est beaucoup plus complète que la seconde. Voici ce que MM. Kupfer et Benecke disent au sujet de cet acte: "La segmentation s'opère d'après le type de l'œuf d'Oiseau. Nous n'avons pas vu le premier noyau de segmentation, mais bien deux noyaux, aux deux côtés du premier sillon. Le sillon transversal coupe le premier à peu près au centre du disque. Ces deux sillons sont courts et ne s'étendent que sur une petite partie du diamètre du disque germinatif. Après eux, toute régularité cesse dans l'apparition des sillons; il peut se former çà et là des sillons partiels sans la moindre relation avec ceux qui sont nés les premiers. On peut en dire autant des noyaux, de sorte qu'il n'est pas permis de regarder tous les noyaux qui apparaissent à l'intérieur du germe — ce mot étant pris dans son acception restreinte — comme des produits de la division du premier noyau de segmentation."

"Lorsque le processus du fractionnement est plus avancé, le germe présente le même aspect — bien connu depuis les descriptions de Coste — que le germe de l'œuf de poule: de petites cellules de segmentation, polygonales-arrondies, occupent un champ central, tandis que de grands segments allongés, disposés radiairement, forment la périphérie. A la fin du sillonnement, toutes les cellules ont à peu près la même grandeur, et le disque germinatif conserve encore ses contours déterminés. Lorsqu'il a commencé à s'étendre, comme blastoderme, sur le vitellus, il se différencie en une aire centrale transparente et une

bordure blanchâtre. A cette bordure il est toujours facile de reconnaître jusqu'où en est arrivé le processus de l'enveloppement du vitellus. Avant que le vitellus ne soit recouvert à demi, le milieu de l'aire centrale s'épaissit, dans les limites d'un contour elliptique, pour former le bouclier embryonnaire."

Sur ce même point, M. Balfour s'exprime de la manière suivante:

"En ce qui concerne les tout premiers phénomènes du développement, mes observations sont bornées à deux phases de la segmentation. Dans la première, la segmentation était opérée environ à moitié, dans la seconde elle était à peu près terminée. Mes observations sur ces deux phases confirment, en général, les données de MM. Kupffer et Benecke. Dans la seconde, le blastoderme était déjà imparfaitement divisé en deux couches, une couche superficielle, épiblastique, formée d'une seule assise de cellules, et une couche plus profonde, comptant plusieurs rangées de cellules dans son épaisseur. Au-dessous de cette couche, de nouveaux segments du vitellus sous-jacent étaient manifestement en train de s'ajouter au blastoderme."

Bien que j'aie eu à ma disposition, pour l'étude des phénomènes du fractionnement, un nombre considérable de germes du *Lacerta viridis*, il se trouva pourtant, à l'examen, que le nombre des phases représentées était très petit. Les recherches faites sur des coupes transversales m'ont appris ce qui suit.

La Pl. 4, fig. 1, montre un germe dans lequel la segmentation est déjà assez avancée. Toutes les cellules du germe sont remplies d'une foule de petits globules vitellins. Dans les couches supérieures, les dimensions des cellules du germe sont notablement moindres que dans les couches inférieures; les différences sont telles, que le diamètre des cellules inférieures du germe atteint presque le double de celui des cellules supérieures. Le germe entier a plus ou moins la forme d'une lentille plan-convexe, la face plane étant tournée vers la périphérie, et la face convexe reposant sur le vitellus. Immédiatement sous le germe, se trouve une couche de protoplasme, très riche en

globules vitellins; si l'on suit cette couche vers l'intérieur, on reconnaît que le protoplasme disparaît de plus en plus, tandis que les globules vitellins deviennent plus gros et plus nombreux, jusqu'à ce que, finalement, il ne reste presque plus que des globules de vitellus. Ces derniers sont, en général, parfaitement homogènes; du côté du germe, toutefois, on en rencontre quelques-uns dont le contenu consiste en un nombre considérable de sphérules très petites. J'ignore si, par la rupture de la membrane d'enveloppe, ces petites sphérules peuvent devenir libres; tout ce que je puis dire, c'est que les globules dont il vient d'être question ressemblent entièrement à ceux qu'on trouve dans la couche du vitellus nutritif située immédiatement sous le germe.

Les fig. 2 et 3 (Pl. 4) sont deux coupes du germe prises dans un stade postérieur du développement, l'une, fig. 2, suivant une direction parallèle à l'axe longitudinal du futur embryon, l'autre, fig. 3, parallèlement à l'axe transversal. La couche cellulaire supérieure du germe se distingue nettement des couches sous-jacentes. La première est composée de cellules cylindriques courtes, partout disposées en une seule assise (voir fig. 4); elles forment l'ectoderme ou feuillet blastodermique externe. Les cellules non encore différenciées, situées au-dessous de cette couche, représentent alors l'entoderme primaire, qui compte plusieurs assises dans son épaisseur et correspond entièrement aux *lower layer cells* de M. Balfour, chez les Poissons cartilagineux. Dans chacune des deux coupes, il y a une cavité de segmentation bien distincte. Le toit de cette cavité est formé par l'ectoderme, uni à des cellules de l'entoderme primaire; le plancher est constitué par le vitellus nutritif. J'ai maintes fois vu cette cavité de segmentation, mais dans aucun de ces cas je n'ai trouvé que le toit de la cavité fût exclusivement formé de cellules de l'ectoderme, comme il arrive chez les Poissons osseux; toujours il y avait encore, sous l'ectoderme, des cellules de l'entoderme primaire, ordinairement 1 ou 2 assises. La fig. 2, qui représente une coupe parallèle à l'axe longitudinal du futur embryon,

montre que les cellules du blastoderme, en s'étendant sur le vitellus nutritif, ne le recouvrent pas dans toutes les directions d'une couche uniforme, mais que l'une des extrémités devient plus mince, l'autre plus épaisse; la partie mince correspond à ce qui sera plus tard l'extrémité céphalique de l'embryon, la partie épaisse à ce qui deviendra l'extrémité caudale.

La fig. 5 donne une coupe longitudinale du germe pratiquée dans une phase encore plus avancée du développement, phase où la cavité de segmentation a de nouveau disparu. L'inégalité d'épaisseur du germe y est très apparente; à l'extrémité antérieure on ne trouve plus sous l'ectoderme qu'une ou deux assises de cellules de l'entoderme primaire, tandis que celles-ci forment encore huit à dix assises à l'extrémité postérieure. Une différenciation ultérieure de l'entoderme primaire, en mésoderme et entoderme secondaire, ne se remarque pas encore dans ce stade.

Au premier stade suivant, que j'ai eu l'occasion d'examiner, l'ouverture près de l'une des extrémités (l'extrémité postérieure) de l'axe longitudinal du bouclier embryonnaire, ouverture observée pour la première fois par MM. Kupffer et Benecke, était déjà formée. Une série de coupes longitudinales, menées perpendiculairement à travers le blastoderme, me fit connaître les rapports suivants.

Trois de ces coupes ont été figurées; la première (Pl. 5, fig. 1) passe juste par le milieu de l'ouverture. Il ressort de cette coupe que l'ouverture en question forme un canal complètement ouvert, dirigé d'arrière en avant et de haut en bas; l'ouverture inférieure du canal s'applique immédiatement sur le vitellus nutritif. A l'exemple de M. Balfour, je désignerai ce canal par le nom de *canal neurentérique* (*c. n.*). La partie (*a*) du blastoderme, située derrière le canal neurentérique, est composée de plusieurs assises de cellules, lesquelles cellules toutefois se ressemblent encore complètement, de sorte qu'il n'y a ici aucune apparence de feuillets blastodermiques; seules les cellules de l'assise supérieure présentent encore plus ou moins distinctement

une forme cylindrique, mais cette assise est en contact immédiat avec les assises cellulaires sous-jacentes.

Il en est tout autrement de la partie du blastoderme qui est située en avant du canal neurentérique. Ici les feuillets blastodermiques sont déjà très nettement différenciés. La couche supérieure, composée de longues cellules cylindriques, qui sont disposées en une assise unique, est séparée des cellules sous-jacentes par un intervalle étroit, mais bien distinct; elle forme le feuillet blastodermique externe, ou l'ectoderme. Au bord du canal neurentérique, où l'ectoderme s'infléchit, pour se fondre finalement avec les cellules de l'entoderme primaire, cette fente étroite disparaît. Si l'on suit les cellules de l'entoderme primaire vers l'avant, on remarque qu'elles se séparent bientôt en deux feuillets. Le feuillet inférieur n'est épais que d'une seule assise de cellules et forme l'entoderme secondaire ou entoderme proprement dit. L'autre couche, située entre l'ectoderme et l'entoderme, est composée de plusieurs assises cellulaires et constitue le mésoderme. Examine-t-on des coupes prises encore plus en avant, on reconnaît que le mésoderme devient insensiblement plus mince et finit pas disparaître complètement; le blastoderme ne consiste alors qu'en deux feuillets, l'ectoderme et l'entoderme, qui ne sont formés chacun que d'une seule assise de cellules. De ce qui précède, il ressort en outre que *le mésoderme est ici, comme chez les Poissons et les Amphibies, un produit de l'entoderme primaire.*

La fig. 2, Pl. 5, représente une coupe longitudinale qui ne passe plus par l'axe du canal neurentérique, mais parallèlement à cet axe; en d'autres termes, elle passe par la paroi latérale du canal. Les feuillets blastodermiques se comportent comme dans la coupe précédente. Tout à fait à l'extrémité antérieure de l'aire pellucide on ne rencontre que deux feuillets, entre lesquels apparaît plus en arrière le mésoderme, qui devient d'autant plus épais qu'on se rapproche davantage du canal neurentérique. Aux alentours du canal, l'entoderme commence à se fusionner avec le mésoderme, et cette masse de cellules

non encore différenciées se continue, sans interruption, avec la masse cellulaire située derrière le canal neurentérique. L'ectoderme présente le même aspect que dans la coupe précédente.

La fig. 3, enfin, est une coupe longitudinale pratiquée à côté du canal neurentérique. La partie postérieure, la plus épaissie, consiste encore entièrement en cellules non différenciées; plus en avant, les cellules de la couche supérieure prennent déjà très vite une forme distinctement cylindrique, et bientôt cette couche est séparée par une fente étroite des cellules sous-jacentes; elle forme, comme nous l'avons vu, l'ectoderme. A son tour, cette dernière couche cellulaire se divise vers l'avant en deux feuillets, l'entoderme, composé d'une seule assise de cellules, et le mésoderme, composé de plusieurs assises. A mesure qu'il s'avance, le mésoderme devient de plus en plus mince, et à l'extrémité antérieure il finit par disparaître tout à fait, de sorte qu'ici on ne retrouve plus, de nouveau, que deux feuillets, formés chacun d'une assise unique, l'ectoderme et l'entoderme secondaire ou proprement dit; ce dernier sera, dans la suite, simplement désigné par le nom d'entoderme.

L'ouverture ci-dessus décrite, située à l'extrémité postérieure de l'axe longitudinal du bouclier embryonnaire, a été découverte par MM. Kupffer et Benecke (7). Ces deux observateurs, toutefois, croyaient avoir affaire, non à un canal, mais à une invagination en forme de cul-de-sac. Suivant eux, il y aurait "formation, bien qu'en proportions restreintes, d'une gastrula". La bouche gastrulaire se fermerait plus tard, et la cavité gastrulaire deviendrait probablement, pensaient-ils, l'allantoïde. Les matériaux des études de MM. Kupffer et Benecke furent empruntés tant au *Lacerta agilis* qu'à l'*Emys europaea*.

M. Balfour (8), au contraire, annonça qu'il ne s'agit pas ici d'une invagination cœciforme, mais d'un vrai canal, auquel il donna le nom de *canal neurentérique* et qui, comme il le dit, "unit le canal neural et le canal alimentaire chez les Ichthyopsides et représente par conséquent le blastopore des *Amphioxus*, *Amphibiens*, etc".

Postérieurement, M. Kupffer (9) fit une seconde communication, dans laquelle il s'attacha à prouver que l'allantoïde "possède un pédicule creux, qui s'enfonce dans la moelle épinièrè". Ce pédicule creux est désigné par lui sous le nom de canal *myélo-allantoïdien.* L'auteur dit aussi que "la cavité gastrale des Reptiles devient réellement le sac épithélial de l'allantoïde".

La différence des résultats obtenus par MM. Kupffer et Benecke, d'une part, et par M. Balfour, d'autre part, fut éclaircie par M. Strahl (13). Cet observateur montra que le stade décrit par MM. Kupffer et Benecke et le stade vu par M. Balfour représentent simplement deux phases différentes du développement du canal neurentérique, celui-ci apparaissant d'abord sous la forme d'une invagination cœciforme et devenant plus tard un vrai canal. M. Strahl propose pour ce canal le nom de canal myélo-entérique.

Le résultat de mes propres observations est entièrement favorable à l'opinion de M. Balfour et de M. Strahl, que le canal neurentérique n'a aucun rapport avec le développement de l'allantoïde, mais forme simplement une communication libre entre la cavité intestinale et la cavité médullaire, analogue à celle qu'on connaît chez les Poissons, etc.

Que représente maintenant la partie du blastoderme située derrière le canal neurentérique? Voici ce que dit à ce sujet M. Balfour (8): "A l'extrémité postérieure de l'embryon se trouve un bourrelet épaissi de tissu, qui continue l'axe embryonnaire. Dans ce bourrelet toutes les couches sont confondues, raison pour laquelle je le regarde comme équivalent à la ligne primitive du blastoderme des Oiseaux. Il est de forme un peu triangulaire, avec le sommet tourné en arrière et la large base placée en avant". Pour M. Strahl (13) également, la partie du blastoderme située derrière le canal neurentérique représente "la ligne primitive, où ne se laisse reconnaître aucune différenciation des feuillets".

Il me semble toutefois que cette manière de voir, suivant laquelle la partie du blastoderme située derrière le canal neurentérique serait homologue à la "ligne primitive" des Oiseaux, suscite quelques objections théoriques. Si l'on admet en effet, avec M. Strahl, que le canal neurentérique des Reptiles se trouve „en ce point de l'embryon où (chez les Oiseaux) l'appendice céphalique de Köllikcr et la ligne primitive se joignent (nœud de Hensen)", il s'ensuivrait qui l'„appendice céphalique" des Oiseaux devrait, à lui seul, être l'homologue de toute la partie de l'embryon des Reptiles située en avant du canal neurentériqne, ce qui pourtant n'est guère probable. Il est nécessaire, avant tout, de chercher comment le canal neurentérique se présente chez les Oiseaux. C'est M. Gasser (11) qui a observé et décrit pour la première fois, dans cette classe d'animaux, la communication entre la cavité médullaire et la cavité intestinale; il l'a vue le plus distinctement dans l'embryon de l'Oie. Sur les figures qui accompagnent le Mémoire de M· Gasser, elle est indiquée par la lettre x, et dans l'explication de la planche, on lit: "x extrémité antérieure renfoncée du sillon primitif, rétraction et fente au fond du tube médullaire, cavité dans le bourrelet terminal, communication entre le tube médullaire et le futur intestin". En décrivant une série de coupes transversales d'un embryon d'Oie à 22 vertèbres primitives, l'auteur dit: "Fig. 1, Pl. VIII, ... on voit, sous le tube médullaire, la corde et, au-dessous de celle-ci, l'entoderme. On remarquera la position de la cavité du tube médullaire; le fond de celui-ci est fendu, dans la corde apparaît une petite cavité. A partir du bas, pénètre dans l'entoderme une gouttière, qui devient bien distincte sur la fig. 2. Dans la fig. 1, un prolongement direct du tube médullaire descend, en se rétrécissant, dans le rudiment de la corde, s'y élargit et, à son extrémité inférieure, communique librement avec la gouttière qui s'est formée, à partir du bas, dans l'entoderme; ainsi se trouve établie une communication entre le futur canal intestinal et le tube médullaire". J'ai reproduit textuellement la description de

ces trois coupes; parce qu'il en ressort que, suivant M. Gasser, le canal neurentérique traverserait la corde.

M. Balfour (8) également s'occupe du canal neurentérique des Oiseaux, dont il dit: "Chez le Poulet, il y a une perforation au plancher du canal neural, qui n'est pas aussi marquée que chez l'Oie ou le Canard et ne va jamais jusqu'à une continuité complète entre les systèmes neural et alimentaire, mais qui conduit simplement du fond du canal neural dans les tissus du renflement caudal et de là dans une cavité de la partie postérieure de la notocorde. Le diverticulum postérieur du canal neural, suivant la ligne du sillon primitif, est, en outre, très considérable chez le Poulet et ne s'oblitère pas aussi vite que chez l'Oie. Le passage incomplet apparaît dans l'embryon du Poulet lorsque celui-ci présente environ douze somites". Selon M. Balfour aussi, le canal neurentérique traverserait donc la corde. L'existence d'un canal neurentérique dans les embryons de nombreuses espèces d'Oiseaux est signalée aussi par M. Braun (10), qui ajoute: "Différentes observations me portent à admettre qu'il y a ici formation, non d'une fente unique, mais de *deux* fentes, qui dans certains cas peuvent coïncider et alors, naturellement, ne sont plus susceptibles d'être distinguées l'une de l'autre; nous pouvons supposer aussi que chez beaucoup d'Oiseaux la formation d'une des fentes a été entravée".

Il ne me paraît toutefois pas entièrement hors de doute que le canal, regardé par M. Balfour et par M. Gasser comme un canal neurentérique, puisse être réellement désigné sous ce nom, et cette réserve s'applique encore plus aux deux canaux décrits par M. Braun, lesquels, d'après lui, formeraient également, à travers la corde, une communication entre la cavité médullaire et la future cavité intestinale. Si l'on examine, en effet, comment les choses se passent dans les autres groupes de Vertébrés où l'existence d'un canal neurentérique a été constatée jusqu'ici, on reconnaît que ce canal se trouve toujours (chez l'Amphioxus, les Cyclostomes, les Ganoïdes, les Sélaciens, les Amphibies) immédiatement derrière le point jusqu'où s'étend

la notocorde, donc, toujours là où le fond du canal médullaire est directement en contact avec la cavité intestinale, autrement dit, à l'extrémité postérieure de l'embryon. Chez les animaux qui viennent d'être nommés, le canal neurentérique est donc toujours situé derrière la corde, jamais il ne passe à travers la corde, comme ce serait le cas chez les Oiseaux. Le canal neurentérique de l'Amphioxus, des Cyclostomes, des Ganoïdes, des Sélaciens et des Amphibies est au nombre des formations embryonnaires dont l'ébauche apparaît de très bonne heure, car il est le résidu du blastopore. Chez les Oiseaux, au contraire, le canal neurentérique se constituerait relativement tard, alors qu'il existe déjà plusieurs vertèbres primitives. Dans un travail sur le développement de la corde dorsale (16), travail qui paraîtra bientôt, j'ai essayé de montrer que la partie postérieure du sillon primitif forme le prolongement direct du sillon ou canal médullaire; le canal neurentérique décrit par MM. Balfour, Braun et Gasser devrait donc, *casu quo*, conduire du sillon primitif, à travers la corde, dans la future cavité intestinale.

Mais il y a encore d'autres considérations qui s'opposent à ce que la communication décrite par MM. Balfour, Braun et Gasser, entre le canal médullaire et la future cavité intestinale, puisse être regardée comme l'homologue, chez les Oiseaux, du canal neurentérique des Poissons, des Amphibies et des Reptiles. Dans leur étude sur les premières phases du développement de l'œuf des Reptiles, MM. Kupffer et Benecke (7) disent ce qui suit: "Après avoir reconnu ces dispositions, nous avons examiné si dans le disque germinatif des Oiseaux, spécialement dans celui du Moineau et de la Poule, les choses se passent de la même manière. Chez le Moineau nous trouvons presque constamment, à l'extrémité postérieure de la ligne primitive, une faux, qui répond à la formation analogue de l'œuf du Lézard, mais qui est beaucoup moins prononcée que chez la Tortue et devient plus indistincte après l'apparition du sillon primitif. Dans la même région, c'est-à-dire à la partie postérieure de

la ligne primitive, nous rencontrons fréquemment un enfoncement arrondi ou fissiforme, dans lequel le sillon primitif débouche. Sur des coupes longitudinales, la cavité d'invagination se laisse reconnaître d'une manière satisfaisante. Le pourtour de l'ouverture est aussi épaissi. Chez la Poule, nous avons plus rarement réussi à constater ces caractères dans le disque germinatif".

Si ce qui précède éveille déjà la présomption que chez les Oiseaux il apparaît, environ à la même place que chez les Reptiles et dans une période très peu avancée du développement, une formation homologue au canal neurentérique des Reptiles, cette présomption gagne en probabilité par les dernières recherches de M. Koller (14). De celles-ci il résulte, en effet, "que la formation de la ligne primitive est due à une prolifération de l'ectoderme, qui se produit au pourtour d'une gouttière (la gouttière falciforme) à l'extrémité postérieure de l'axe longitudinal de l'aire pellucide". Dans un autre passage, le même auteur dit: "j'ai déjà fait mention de mon observation antérieure, que, vue sur la surface de l'œuf, la ligne primitive apparaît d'abord comme un appendice très court du bouton de la faux, et ensuite se prolonge peu à peu vers le centre de l'aire pellucide et au-delà". Il me paraît presque certain que la "gouttière falciforme" de Koller est l'homologue, chez les Oiseaux, du canal neurentérique des Reptiles. Entre ces deux formations il existe pourtant une différence, qu'il convient de signaler. Le première constitue, d'après l'auteur cité, une invagination en cul-de-sac, la seconde, comme nous le savons, un canal ouvert aux deux côtés. Nous ne devons pas oublier, toutefois, que M. Koller, ainsi qu'il l'indique lui-même, a pratiqué les coupes à la main et n'en a pas fait des séries avec le microtome. En outre, surtout quand il s'agit de séries de coupes longitudinales prises dans cette phase du développement, on doit avoir soin de coller immédiatement les préparations sur le verre porte-objet; sinon, il est presque impossible de s'assurer de l'existence d'un canal entièrement ouvert. Rappelons enfin que, d'après les observations de M. Strahl, le canal neurentérique des Reptiles se présente

d'abord comme une invagination en cul-de-sac, et plus tard comme un vrai canal. Au sujet de sa "gouttière falciforme", M. Koller lui-même fait ces intéressantes remarques: "M. Gasser a appelé l'attention sur un conduit qui, dans l'embryon de l'Oie, se trouve à la partie postérieure de la gouttière médullaire et, se dirigeant obliquement en avant et en bas, perfore la ligne primitive; comme ce conduit établit une communication entre le tube nerveux et la cavité regardée eomme la première ébauche de l'intestin, M. Gasser l'avait comparé à ce qui a été appelé l'anus de Rusconi chez les Mammifères inférieurs. Postérieurement, M. Balfour a observé, sur des germes de Lézards, un conduit analogue dans la partie antérieure de la ligne primitive, conduit qu'il a assimilé à celui de Gasser. Mais, comme M. Balfour jugeait que le conduit observé par lui était identique avec l'invagination ectodermique de Kupffer et Benecke, il crut devoir faire remarquer que ces deux auteurs n'avaient pas vu que leur invagination ectodermique manquait de fond; en réalité, se serait un canal ouvert aux deux bouts. Je me permets de rectifier cette méprise, en ce sens que, s'il n'est pas douteux que le conduit de Gasser corresponde au canal de Balfour, par contre l'invagination ectodermique de Kupffer et Benecke est probablement l'équivalent de ma gouttière falciforme". Quand il s'exprimait ainsi, M. Koller ne connaissait pas encore les recherches de M. Strahl, qui, nous l'avons vu, a montré que l'invagination décrite par MM. Kupffer et Benecke est parfaitement semblable au canal neurentérique de Balfour. De là résulterait alors aussi que la gouttière falciforme de Koller correspond au canal neurentérique des Reptiles.

Tout nous conduit donc à admettre qu'il existe chez les Oiseaux, dans une phase très précoce du développement, un canal neurentérique entièrement analogue par sa situation à celui des Reptiles. De même que chez les Amphibies, les Cyclostomes, les Ganoïdes et l'Amphioxus, ce canal, chez les Reptiles, persiste longtemps. M. Strahl a trouvé, et je puis pleinement confirmer ce résultat de ses recherches, que dans un stade

de développement où le canal médullaire est déjà complètement fermé et où l'intestin céphalique et l'intestin caudal sont déjà ébauchés, il y a encore une communication libre entre le canal médullaire et l'intestin caudal (voir Pl. IV, fig. 7); que dans ce stade, par conséquent, il existe encore un canal neurentérique. C'est ce dont j'ai pu me convaincre, tant sur des embryons de Serpents (*Tropidonotus*), que sur des embryons de Lézards (*Lacerta*). Le canal en question est ici, de même que dans les groupes d'Amniotes qui viennent d'être nommés, toujours situé derrière la corde dorsale, mais il ne la traverse pas. Chez les Oiseaux, un canal neurentérique apparaît bien, ontogénétiquement, mais il ne tarde pas à s'effacer, ainsi qu'il ressort des observations de M. Koller.

Si donc chez les Oiseaux et chez les Reptiles, dans un état très jeune du développement, il existe à la partie postérieure de l'axe longitudinal du blastoderme, en des points tout à fait correspondants, un canal neurentérique, avec cette seule différence que chez les Oiseaux ce canal disparaît promptement, tandis que chez les Reptiles, comme chez les autres Vertébrés inférieurs, il persiste longtemps, — s'il en est ainsi, dis-je, la partie du blastoderme des Reptiles, qui est située derrière le canal neurentérique, ne peut être regardée comme une ligne primitive, car alors cette ligne serait située, chez les Reptiles, *en arrière* du canal neurentérique, chez les Oiseaux, *en avant*, ce qui n'est guère admissible.

Mais si, chez les Reptiles, la partie du blastoderme qui se trouve derrière le canal neurentérique n'est pas une ligne primitive, quelle signification faut-il donc y attacher? Chez les *Anamnia*, le canal neurentérique est situé tout à fait à l'extrémité postérieure de l'embryon, chez les Oiseaux et les Reptiles il y a encore, derrière le canal neurentérique, une masse considérable de cellules embryonnaires. Or, si l'on considère que, précisément dans ces deux groupes de Vertébrés, se montre pour la première fois un organe qui manque encore aux *Anamnia*, à savoir l'allantoïde, il paraîtra probable que c'est la masse

cellulaire située derrière le canal neurentérique qui fournit les matériaux nécessaires au développement de l'allantoïde.

Dans ses recherches sur les premières phases du développement des *Lacertilia*, M. Balfour (8) a aussi essayé d'expliquer la nature de la ligne primitive, et cela, en la comparant aux derniers restes du blastopore des Vertébrés inférieurs.

Bien que je n'aie pu admettre, avec M. Balfour, que la partie du blastoderme des Reptiles qui est située derrière le canal neurentérique ait la signification d'une ligne primitive, bien que je me sois efforcé de montrer que ce qui a été décrit comme canal neurentérique chez les Oiseaux, par Balfour, Gasser et Braun, ne doit probablement pas être considéré comme tel, mais que chez les Oiseaux, dans un stade de développement beaucoup moins avancé, on rencontre un canal neurentérique exactement analogue par sa situation à celui des Reptiles, lequel canal toutefois n'a chez eux qu'une durée très courte,— ces divers arguments, au lieu de s'opposer à l'interprétation de la ligne primitive proposée par M. Balfour, lui viennent au contraire en aide. En faveur de cette interprétation plaident aussi les résultats de mes recherches sur le développement de la notocorde des Oiseaux, et non moins ceux obtenus par M. Koller. J'espère revenir plus tard sur ce point, et je me bornerai ici à appeler de nouveau l'attention sur la haute importance de ce que M. Koller nous apprend au sujet de la formation de la ligne primitive, à savoir; "qu'elle est due à une prolifération qui se produit au pourtour de la gouttière falciforme" (correspondant, comme j'ai essayé de le montrer, au canal neurentérique des Reptiles), "à l'extrémité postérieure de l'axe longitudinal de l'aire pellucide". Ailleurs il dit que, dans un stade "où la ligne primitive occupe des ⅔ aux ¾ du diamètre longitudinal, la gouttière falciforme n'existe plus".

Revenons maintenant aux Reptiles. Entre le stade où le canal neurentérique se montre dans la forme que je viens de

décrire, et celui où le canal médullaire est déjà entièrement fermé et où l'intestin céphalique et l'intestin caudal sont déjà ébauchés, aucun stade intermédiaire n'a malheureusement été à ma disposition. Je n'ai donc rien à communiquer sur le développement de la notocorde. Il importera pourtant de s'assurer si, chez les Reptiles aussi, — comme on peut l'attendre à priori, — les premiers rudiments de la corde se forment, à partir du canal neurentérique, vers l'avant; que la corde est, ici également, un produit de l'entoderme, c'est ce qu'a déjà montré M. Balfour. Mais il importera non moins de rechercher comment le mésoderme se comporte au pourtour du bord antérieur du canal neurentérique, car, dans le stade que j'ai eu l'occasion d'étudier, sur une préparation unique, les feuillets blastodermiques n'étaient pas encore différenciés au point en question, et plus en avant, où les feuillets blastodermiques étaient déjà bien distincts, il y avait du mésoderme dans la ligne médiane du blastoderme. Moi-même je m'appliquerai à éclaircir ce point aussitôt qu'un nombre suffisant de stades successifs de développement seront à ma disposition.

Avant de finir, encore un mot sur la structure des membranes de l'œuf. Chez lez Lézards et les Serpents, le liquide amniotique paraît, ou bien manquer complètement, ou bien n'apparaître que très tard; dans aucun des stades de développement que j'ai eu l'occasion d'examiner, il n'y avait la moindre trace de ce liquide, de sorte que l'amnios vrai s'appliquait assez étroitement, comme un sac fermé, sur l'embryon.

Les rapports de l'amnios séreux, ou faux amnios, ont déjà été parfaitement mis en lumière par von Baer. L'un des feuillets de l'amnios séreux est formé, comme on sait, par l'ectoderme et la lame somatique du mésoderme (le *somatopleure* de Balfour), l'autre par la lame splanchnique (le *splanchnopleure* de Balfour), et l'entoderme; l'espace entre ces deux feuillets est un prolongement de la cavité pleuro-péritonéale. Là où se trouve l'embryon, les deux feuillets s'écartent éntre eux, pour former

un sac assez large, la cavité du faux amnios; tout autour du vitellus nutritif, les deux feuillets sont en contact immédiat l'un avec l'autre.

Tandis qu'à l'origine les cellules de l'ectoderme de l'amnios séreux diffèrent très peu en forme et en structure des cellules de l'entoderme de ce même amnios, des différences assez notables apparaissent plus tard. D'abord, on remarque que les cellules de l'ectoderme, qui primitivement sont en forme de fuseau, deviennent plus tard hautes, larges, plus ou moins cubiques (Pl. V, fig. 4 et 5, *e. am. s.*). Mais, plus caractéristiques encore sont les changements de l'entoderme, surtout dans la partie de l'amnios séreux qui est située immédiatement sur le vitellus nutritif. Ici, en effet, ces cellules entodermiques, qui initialement étaient aussi plus ou moins fusiformes, sont transformées en cellules cubiques très grandes, dont le protoplasme est rempli de petits globules vitellins, très abondants (Pl. V, fig. 5, *e. am. s.*). Là où l'amnios séreux entoure la partie de l'embryon qui s'est déjà dégagée du vitellus nutritif, l'entoderme conserve davantage sa structure originelle: ses cellules sont de dimensions beaucoup moindres, ont encore leur forme en fuseau et ne contiennent qu'une petite quantité de globules vitellins (Pl. V, fig. 4 *ent. am. s.*).

Sur celles de leurs faces qui sont tournées l'une vers l'autre, les deux feuillets de l'amnios séreux sont revêtus d'un épithélium, qui n'a toujours qu'une seule assise de cellules dans son épaisseur; cet épithélium se continue aussi sur les vaisseaux sanguins qu'on trouve en grande abondance dans les deux feuillets de l'amnios séreux, immédiatement contre leurs lames somatiques et surtont contre leurs lames splanchniques, vaisseaux qui contribuent à unir les deux feuillets l'un à l'autre, là où ceux-ci entourent le vitellus nutritif. L'épithélium en question peut de plein droit être regardé comme un endothélium, surtout si l'on considère, fait déjà mentionné ci-dessus, que l'espace entre les deux feuillets de l'amnios séreux est le prolongement direct de la cavité pleuro-péritonéale.

Liste des ouvrages cités.

---

1. C. Gegenbaur, Ueber den Bau und die Entwickelung der Wirbelthier-Eier mit partieller Dottertheilung; in: *Archiv für Anatomie und Physiologie*, p. 491, 1861.
2. W. Waldeyer, Eierstock und Ei. Ein Beitrag zur Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Sexualorgane, 1870.
3. Fr. Leydig, Die in Deutschland lebenden Arten der Saurier, 1872.
4. Th. Eimer, Untersuchungen über die Eier der Reptilien; in: *Archiv für mikrosk. Anatomie*, Bd. VIII, p. 216 et p. 397, 1872.
5. H. Ludwig, Ueber die Eibildung im Thierreiche; in: *Arbeiten aus dem Zool-zoot. Institut in Würzburg*. Bd. I, p. 287, 1874.
6. M. Braun, Das Urogenitalsystem der einheimischen Reptilien; in: *Arbeiten aus dem Zool.-zoot. Institut in Würzburg*. Bd. IV, p. 113, 1877.
7. C. Kupffer und Benecke, Die erste Entwickelung am Ei der Reptilien. Königsberg, 1878.
8. T. M. Balfour, On the early Development of the Lacertilia, together with some observations etc.; in: *Quart. Journ. mikrosk. Science*, Vol. XIX, 1879.
9. C. Kupffer, Die Entstehung der Allantois und die Gastrula der Wirbelthiere; in: *Zool. Anzeiger*, Vol. II, p. 520, 593 et 512. 1879.
10. M. Braun, Die Entwickelung des Wellenpapagei's; in: *Arbeiten aus dem Zool-zoot. Institut in Würzburg*, Bd. V, 1879.

11. Gasser, Der Primitivstreifen bei Vogelembryonen; in: *Schriften der Gesellschaft zur Beförd. der gesammten Naturw. zu* Marburg, 1879.

12. T. M. Balfour, A treatise on comparative embryologie; T. II, 1881.

13. H. Strahl, Ueber die Entwickelung des Canalis myeloentericus und der Allantois der Eidechsche; in: *Archiv für Anat. und Physiol. Anat. Abtheil.*, p. 122, 1881.

14. C. Koller, Untersuchungen über die Blätterbildung im Hühnerkeim; in: *Archiv für mikrosk. Anatomie*, Bd. XX, p. 174, 1881.

15. C. K. Hoffmann, Zur Ontogenie der Knochenfische; in: *Verhandelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen*, Deel XX, 1881.

16. C. K. Hoffmann, Ueber die Entwickelungsgeschichte der Chorda dorsalis, 1882; in: *Festschrift zu Henle's* 50 *jährigen Doctorjubilaeum.*

Explication des figures.

Planche IV.

Fig. 1. Coupe d'un germe de *Lacerta viridis*, dans un stade déjà assez avancé du développement. Gross. $\frac{40}{1}$.

Fig. 2. Coupe transversale d'un germe de *Lacerta viridis*, dans un stade où la segmentation est terminée. Gross. $\frac{40}{1}$.

c. s. Cavité de segmentation.

Fig. 3. Coupe longitudinale d'un germe dans le même stade. Gross. $\frac{40}{1}$.

c. s. Cavité de segmentation.

Fig. 4. Partie du même objet, fortement grossie.

ekt. Ectoderme.

p. ent. Entoderme primaire.

Fig. 5. Coupe longitudinale d'un germe de *Lacerta viridis*, dans un stade plus avancé, où la cavité de segmentation est de nouveau disparue. Gross. $\frac{30}{1}$.

Fig. 6. Coupe d'une très petite partie d'un œuf de *Lacerta agilis*, avant la maturité sexuelle de l'œuf. Gross. $\frac{480}{1}$.

th. f. Theca folliculi.

gr. Epithélium granuleux.

z. r. Zone radiée.

pr. Couche de protoplasme (vitellus formateur).

Fig. 7. Coupe transversale perpendiculaire d'un embryon de *Tropidonotus natrix*, dans un stade où l'intestin céphalique et l'intestin caudal, de même que le canal médullaire, sont déjà fermés et où la communication entre la cavité médullaire et la cavité intestinale existe encore. Gross. $\frac{160}{1}$.

c. m. Canal médullaire. *d.* Cavité intestinale. *e. Epiderme* (feuillet corné).

Fig. 8. Coupe transversale d'une partie d'un œuf de *Lacerta agilis*, dans un stade où la vésicule germinative est appliquée immédiatement contre la zone radiée. Gross. $\frac{160}{1}$.

th. f., *gr*, *z. r.*, comme dans la Fig. 6; *v.* vésicule germinative.

Planche V.

Fig. 1. Coupe longitudinale passant par le milieu du canal neurentérique (*Lacerta viridis*). Gross. $\frac{160}{1}$.

ekt. Ectoderme.

mes. Mésoderme.

ent. Entoderme.

c. n. Canal neurentérique.

a. La partie du blastoderme qui est située derrière le canal neurentérique.

Fig. 2. Coupe longitudinale passant par la paroi latérale du canal neurentérique (Même objet). Gross. $\frac{160}{1}$.

ekt., *mes.*, *eut.*, *c. n.*, *a*, comme dans la Fig. 1.

Fig. 3. Coupe longitudinale passant à côté du canal neurentérique (Même préparation). Gross. $\frac{160}{1}$.

ekt., *mes.*, *c. n.*, *a.*, comme dans la Fig. 1.

Fig. 4. Petite partie d'une coupe transversale perpendiculaire d'un embryon de *Tropidonotus natrix*, dans un stade déjà assez avancé. Gross. $\frac{160}{1}$.

e. am. s. Ectoderme de l'amnios séreux.

h. am. s. Lame somatique de l'amnios séreux.

end. Endothélium de l'amnios séreux.

e. am. v. Ectoderme de l'amnios vrai.

h. am. v. Lame somatique de l'amnios vrai.

x. Cavité de l'amnios séreux (prolongement de la cavité pleuro-péritonéale).

x'. Cavité de l'amnios vrai.

mes. Mésoderme.

m. sp. Moelle épinière.

m. c. Canal médullaire.

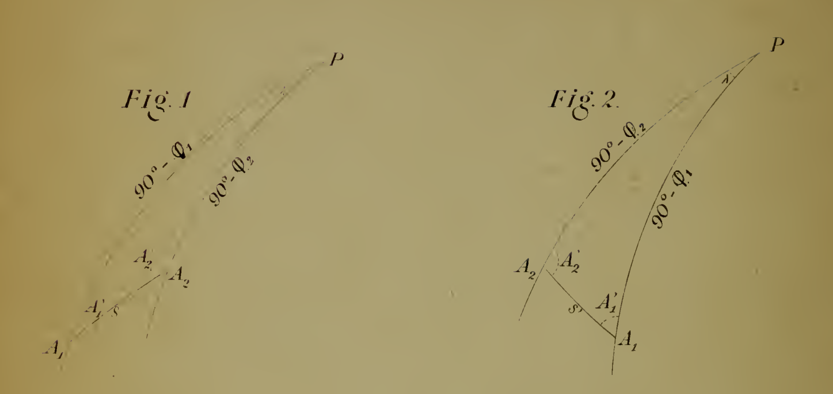
d. am. s. Lame splanchnique de l'amnios séreux.

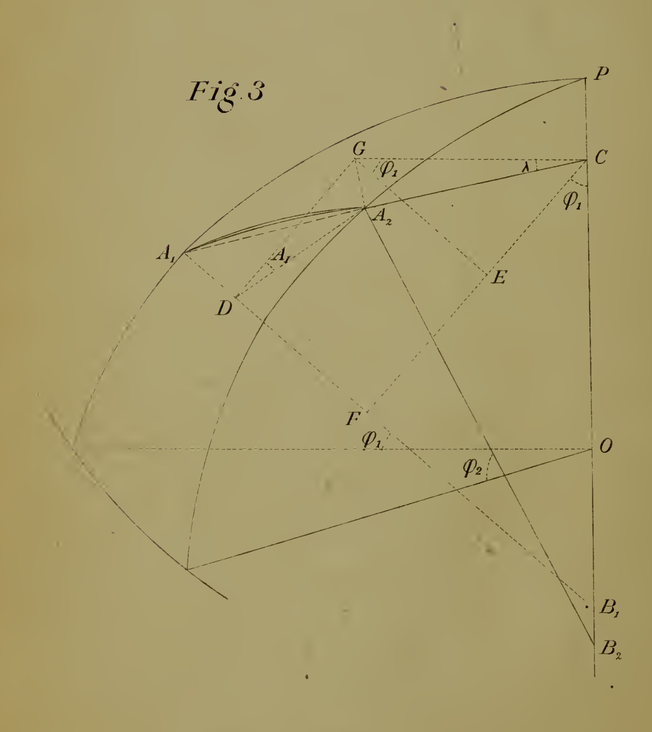
e'. am. s. Entoderme de l'amnios séreux.

y. Vaisseaux sanguins.

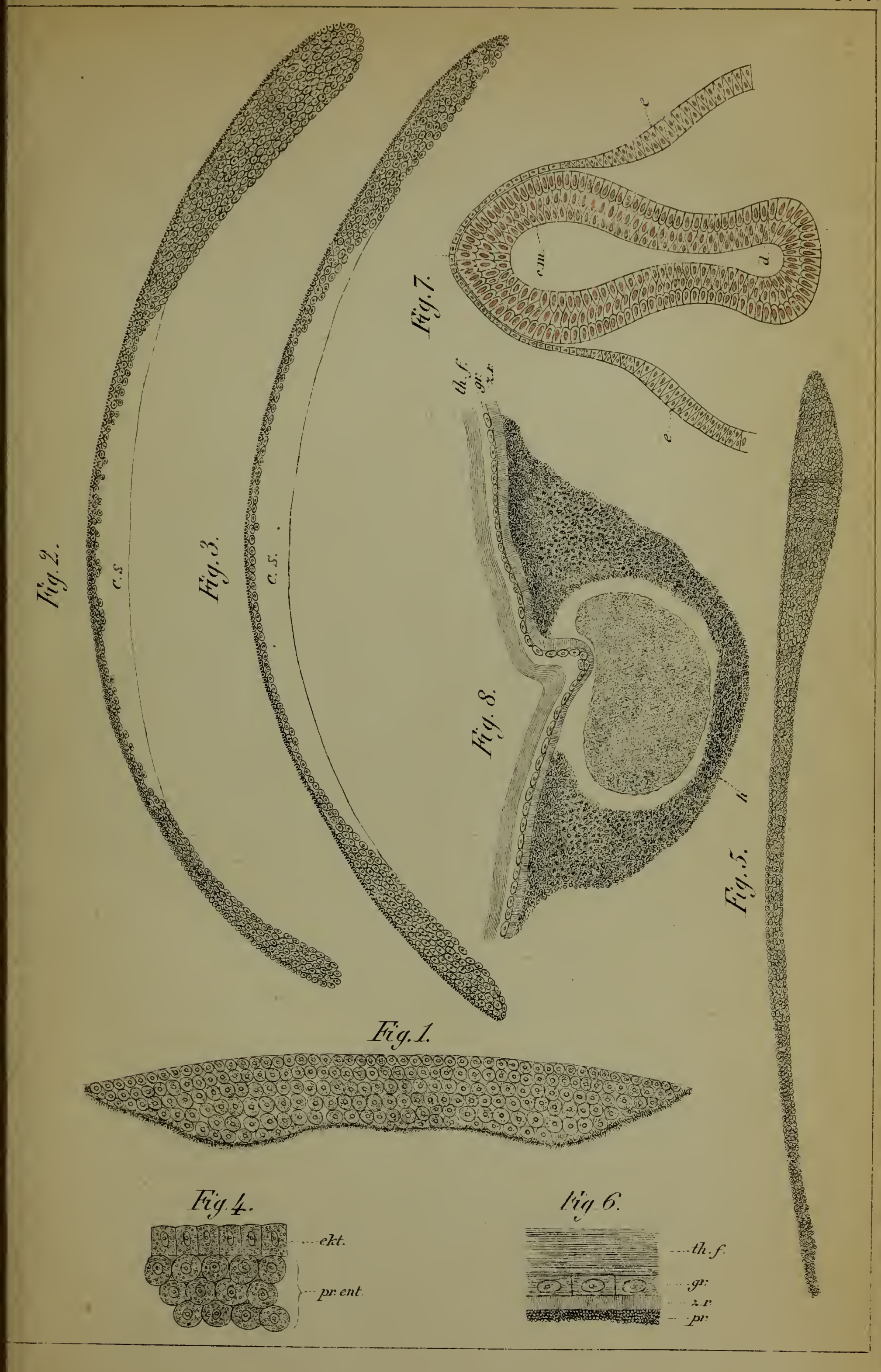
Fig. 5. Coupe d'une partie de l'amnios séreux qui entoure le vitellus nutritif (*Tropidonotus natrix*). Gross. $\frac{280}{1}$.

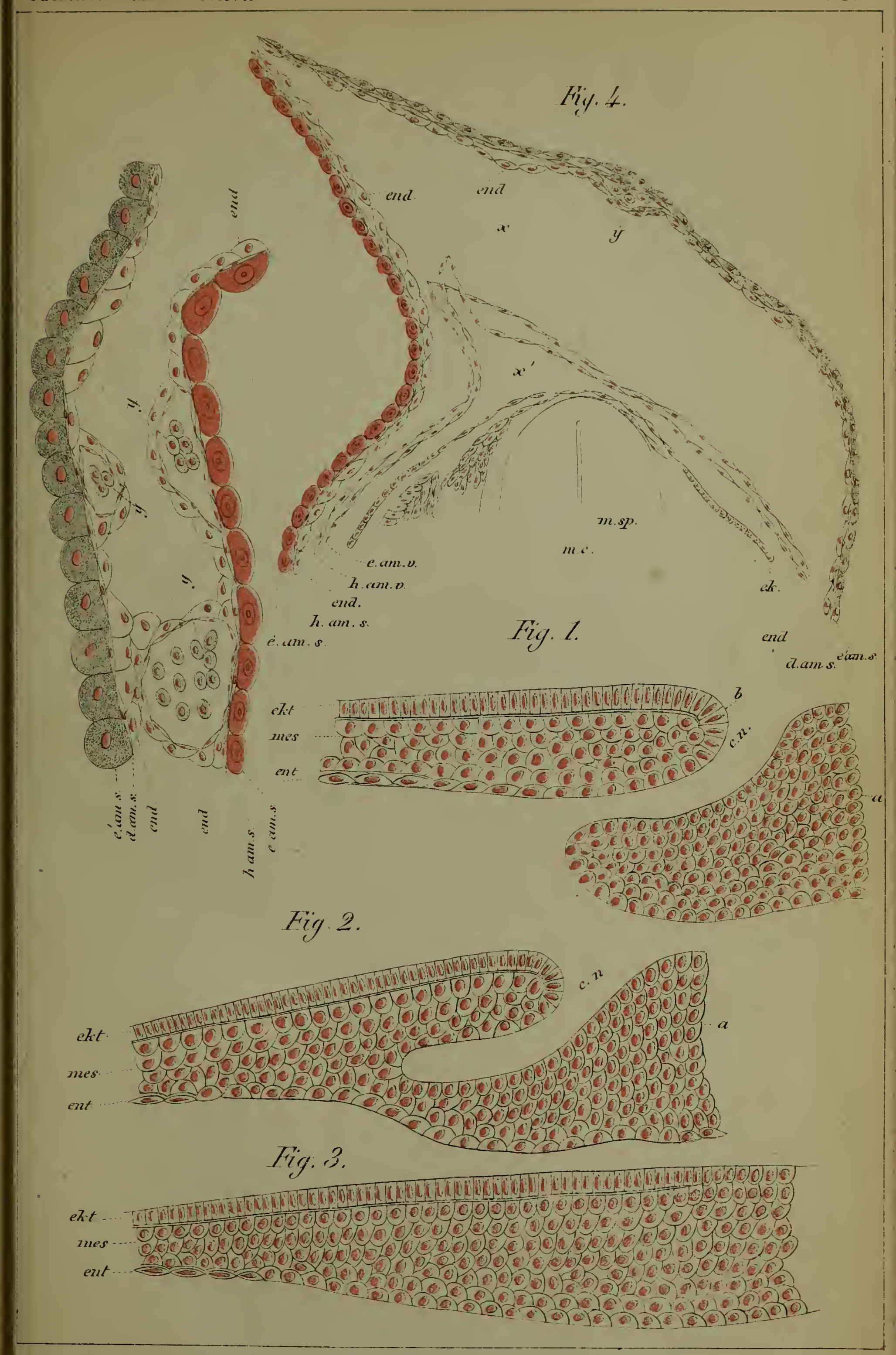
e'. am. s., *d. am. s.*, *end.*, *h. am. s.*, *x.*, *y.*, comme dans la Fig. 4.





Amand Lith Amst.


Fig. 1.
Fig. 2.
c.s.
Fig. 3.
c.s.
Fig. 4.
ekt.
pr. ent.
Fig. 5.
Fig. 6.
th. f.
gr.
z. r.
pr.
Fig. 7.
e
c.m.
d.
Fig. 8.
th. f.
gr.
z. r.


Fig. 4.
end
end
x
y
x'
m.sp.
m.c.
e. am. v.
h. am. v.
end.
h. am. s.
é. am. s.
ek.
end
d. am. s.
é am. s.
y
y
y
é am s.
d. am. s.
end
end
h am. s.
e am. s
Fig. 1.
ekt
mes
ent
b
c.n.
a
Fig. 2.
c. n
ekt
mes
ent
a
Fig. 3.
ekt
mes
ent

TOME XVII. 3me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1882.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR LES

MOUVEMENTS QUI SE PRODUISENT DANS UNE MASSE GAZEUSE,

SOUS L'INFLUENCE DE LA PESÀNTEUR, À LA SUITE DE DIFFÉRENCES DE TEMPÉRATURE,

PAR

H. A. LORENTZ.

§ 1. Dans un Mémoire antérieur [1]), j'ai déduit des principes fondamentaux de la théorie cinétique des gaz les équations du mouvement des corps gazeux. Parmi les problèmes auxquels ces équations peuvent être appliquées, il y en a un qui tout d'abord avait spécialement attiré mon attention, celui des courants produits par une inégale distribution de température et de l'influence que ces mouvements exercent sur la transmission de la chaleur entre des corps de températures différentes.

Les physiciens qui se sont occupés de la détermination expérimentale du coefficient de conductibilité calorifique des gaz ont reconnu que, lorsque la tension de ceux-ci atteint une atmosphère,

[1]) Lorentz: Les équations du mouvement des gaz et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz (*Arch. néerl.*, t. XVI).

ou reste peu au-dessous, l'influence en question est très considérable; pour la rendre inoffensive, ils ont dû avoir recours à la raréfaction des gaz. Or j'espérais que, en soumettant au calcul les courants déterminés par la chaleur, on pourrait employer aussi les expériences faites pour des densités supérieures dans la détermination du coefficient de conductibilité; ces expériences conduiraient alors, en outre, à la connaissance du coefficient du frottement interne, attendu que celui-ci doit évidemment influer sur l'intensité des courants qui se produisent dans le gaz.

J'avais commencé cette étude, quand parut sur le même sujet un mémoire de M. Oberbeck [1]), et tout récemment un calcul a été exécuté dans le même dessein par M. L. Lorenz [2]). Ni l'un ni l'autre de ces deux physiciens n'a toutefois résolu complètement le problème. La quantité de chaleur transmise par les courants est trouvée par M. Oberbeck sous la forme d'une série, dont le premier terme est proportionnel au cube de la différence de température, tandis que les termes suivants en contiennent des puissances encore plus élevées. Or, un examen sommaire des résultats des expériences de MM. Kundt et Warburg [3]) et de celles de M. Winkelmann [4]) suffit à montrer que la partie de la chaleur transmise, qui dépend des courants, ne peut pas renfermer de terme proportionnel au cube de la différence de température; aussi M. Oberbeck pense-t-il que, pour des densités qui ne sont pas très petites, la série établie par lui divergera et ne pourra par conséquent représenter la réalité.

Le résultat auquel arrive M. Lorenz est mieux en harmonie avec les faits. Il traite le cas particulier des courants produits le long d'une plaque verticale chauffée, et il trouve pour la vitesse de refroidissement une expression dans laquelle la différence de température est affectée de l'exposant $\frac{5}{4}$, ce qui est

---

[1]) Oberbeck, *Wied. Ann.*, t. VII, p. 271.

[2]) Lorenz, *Wied. Ann.*, t. XIII, p. 583.

[3]) Kundt u. Warburg, *Wied. Ann.*, t. CLVI, p. 177.

[4]) Winkelmann, *Wied. Ann.*, t. CLVI, p. 497.

en accord satisfaisant avec le résultat des expériences de Dulong et Petit. Celles de MM. Kundt et Warburg et de M. Winkelmann ne contredisent pas non plus l'hypothèse que la vitesse de refroidissement, — en tant qu'elle dépend des mouvements du gaz, — est proportionnelle à une pareille puissance de la différence de température. Toutefois, un examen spécial sera nécessaire avant que le résultat obtenu par M. Lorenz puisse être appliqué à d'autres cas.

Moi non plus je n'ai pas réussi à résoudre le problème, et l'espoir que j'avais en entreprenant le calcul ne s'est pas réalisé. Néanmoins, je crois opportun de communiquer mes considérations, bien qu'elles ne doivent être regardées que comme une préparation à un traitement plus complet de la question.

§ 2. Les équations du mouvement des gaz, sous leur forme générale, sont assez compliquées. Aussi se borne-t-on généralement, par exemple dans l'étude des phénomènes du son, aux dérangements infiniment petits de l'état d'équilibre. De la même manière, dans le problème qui nous occupe ici, les différences de température et les courants qui en résultent peuvent d'abord être supposés infiniment petits, ce qui fait disparaître différents termes dans les équations du mouvement. Même alors, on trouve encore quelque influence des courants sur la transmission de la chaleur. Il est vrai que la convection proprement dite de la chaleur disparaît, comme quantité du second ordre, mais les courants donnent pourtant lieu à une modification dans la forme des surfaces isothermes et par conséquent aussi dans la quantité de chaleur transmise par conductibilité. Le calcul montre toutefois que, dans des expériences telles que celles de MM. Kundt et Warburg, cette modification est très légère et absolument incapable d'expliquer l'influence qu'ils ont reconnue aux courants. Il ne sera donc plus permis, dans ces expériences, de regarder les différences de température comme infiniment petites. Effectivement, on trouve que déjà pour de petites différences, de quelques degrés par exemple, différents termes, qui d'abord avaient été négligés dans les équations du mouvement, devien-

nent égaux ou supérieurs à ceux qu'on avait conservés. La considération des équations du mouvement apprend en effet que, du moment où il faut tenir compte du frottement interne et de la conductibilité thermique des gaz, de petites vitesses, par exemple de 1 mm. par seconde, ne peuvent plus être traitées comme infiniment petites. Or si l'on a recours aux équations obtenues pour un dérangement infiniment petit de l'état d'équilibre, pour apprécier les vitesses qui se produisent dans les courants dus à la chaleur, on reconnaît que, même en cas de très faibles différences de température, ces vitesses sont déjà beaucoup trop grandes pour qu'on puisse les regarder comme infiniment petites.

A la page 12 du Mémoire ci-dessus cité, les équations du mouvement des gaz ont d'abord été établies sous la forme générale suivante:

$$\frac{\partial (Nu)}{\partial x} + \frac{\partial (Nv)}{\partial y} + \frac{\partial (Nw)}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (a_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
-N\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial z} + \frac{\partial (Nu)}{\partial t} &= 0, \\
-N\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial (Nv)}{\partial t} &= 0, \\
-N\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial (Nw)}{\partial t} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b_1)$$

$$-mN\left(u\frac{\partial \psi}{\partial x} + v\frac{\partial \psi}{\partial y} + w\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + $$
$$+ \frac{\partial S_z}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c_1)$$

Dans ces équations, x, y, z représentent les coordonnées d'un point dans l'espace, t le temps, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ les accélé-

rations qu'une molécule acquiert par l'action des forces extérieures, m la masse d'une molécule, tandis que N, u, v, w, P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{x,z}$, R, S_x, S_y, S_z sont des quantités qui dépendent de l'état du gaz au point (x, y, z) et au temps t. Si l'on considère un élément de volume $d\tau$, le nombre des molécules qui y sont contenues est $N d\tau$, de sorte que N est le nombre des molécules par unité de volume. Désignons encore par (ξ, η, ζ) la vitesse avec laquelle se meut le centre de gravité d'une molécule, et par E' l'énergie de cette molécule (c'est-à-dire la somme de l'énergie du mouvement de translation et de l'énergie interne); nous avons alors, en prenant les sommes pour toutes les molécules contenues dans $d\tau$:

$$\Sigma \xi = N u d\tau, \quad \Sigma \eta = N v d\tau, \quad \Sigma \zeta = N w d\tau,$$
$$\Sigma \xi^2 = P_x d\tau, \quad \Sigma \eta^2 = P_y d\tau, \quad \Sigma \zeta^2 = P_z d\tau,$$
$$\Sigma \xi\eta = Q_{x,y} d\tau, \quad \Sigma \eta\zeta = Q_{y,z} d\tau, \quad \Sigma \zeta\xi = Q_{z,x} d\tau,$$
$$\Sigma E' = R d\tau,$$
$$\Sigma \xi E = S_x d\tau, \quad \Sigma \eta E' = S_y d\tau, \quad \Sigma \zeta E' = S_z d\tau.$$

Remarquons que u, v, w sont les vitesses, dans la direction des axes des coordonnées, que l'élément $d\tau$ paraît posséder dans son ensemble, les *vitesses hydrodynamiques* du gaz, et que R représente l'énergie par unité de volume. Les quantités P_x, P_y, P_z, $Q_{x,y}$, $Q_{y,z}$, $Q_{x,z}$ sont en rapport avec les différences entre les quantités de mouvement qui sont transmises dans les deux sens, à travers des plans perpendiculaires aux axes des coordonnées, en vertu du mouvement des molécules; de même, les quantités S_x, S_y, S_z représentent l'énergie transmise par de pareils plans.

En ce qui concerne les équations du mouvement elles-mêmes, la première, celle de la continuité, exprime comment le nombre des molécules contenues dans un élément de volume $d\tau$ varie à raison de l'entrée et de la sortie de molécules par les faces latérales. La première des équations (b_1) détermine, d'une

manière analogue, la variation de la quantité de mouvement dans la direction de l'axe des x pour les molécules qui se trouvent à l'intérieur de $d\tau$. Cette variation est représentée par le terme $\frac{\partial (N u)}{\partial t}$ (multiplié par $m\, d\tau$) et elle est due en partie à l'action des forces extérieures $\left(\text{le terme } - N \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$, en partie à l'entrée et à la sortie de molécules par les faces latérales de l'élément $\left(\text{d'où proviennent les termes } \frac{\partial P_x}{\partial x}, \frac{\partial Q_{x,y}}{\partial y}, \frac{\partial Q_{x,z}}{\partial z}\right)$.

Les autres équations (b_1) ont, naturellement, une signification analogue. Enfin, (c_1) exprime comment l'énergie à l'intérieur de l'élément $d\tau$ varie avec le temps $\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)$, en partie par l'action des forces extérieures (le premier terme), en partie par l'entrée et la sortie de molécules à travers les faces latérales $\left(\text{les termes } \frac{\partial S_x}{\partial x}, \frac{\partial S_y}{\partial y}, \frac{\partial S_z}{\partial z}\right)$.

Les équations prennent une forme plus commode lorsque, après avoir multiplié (a_1) et (b_1) par m, on introduit la densité $m N = \varrho$. Si, en outre, les produits de P_x, etc. par m sont représentés par les petites lettres correspondantes, on obtient:

$$\frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A_1)$$

$$\left.\begin{aligned} -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial z} + \frac{\partial (\varrho u)}{\partial t} &= 0, \\ -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial q_{x,y}}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial z} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial t} &= 0, \\ -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial q_{x,z}}{\partial x} + \frac{\partial q_{y,z}}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial t} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (B_1)$$

$$-\varrho\left(u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}+w\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial S_z}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial t}=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(C_1)$$

§ 4. A elles seules, toutefois, ces équations ne suffisent pas pour la solution des problèmes sur le mouvement des gaz; on doit les combiner, à cet effet, avec celles qui expriment p_x, etc. en fonction de la densité, de la température et de la vitesse hydrodynamique du gaz.

Désignons par h la valeur moyenne du carré de la vitesse du mouvement calorifique des molécules gazeuses, valeur qui est liée par la relation $h = e\,T$ (e constant) à la température absolue T; par $\vartheta\,(h)$ l'énergie intramoléculaire de l'unité de masse du gaz, par μ le coefficient du frottement, par $\varkappa$ celui de la conductibilité calorifique (exprimé en unités de travail), par ν le troisième coefficient, dont la signification a été exposée dans mon précédent Mémoire; posons en outre, pour abréger,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=K\,,$$

on a alors (*Arch. néerl.*, XVI, p. 45):

$$p_x=\tfrac{1}{3}\,\varrho\,h+\varrho\,u^2-2\,\mu\,\frac{\partial u}{\partial x}+\tfrac{2}{3}\,\mu\,K,\ \text{etc.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

$$q_{x,y}=\varrho\,u\,v-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \text{etc.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$$R=\tfrac{1}{2}\,\varrho\,(u^2+v^2+w^2)+\tfrac{1}{2}\,\varrho\,[h+2\,\vartheta\,(h)]+\nu\,K,\;.\;.\;(3)$$

$$S_x=\tfrac{1}{2}\,\varrho\,u\,[\tfrac{5}{3}\,h+2\,\vartheta\,(h)+(u^2+v^2+w^2)]-\frac{\varkappa}{e}\frac{\partial h}{\partial x}-$$
$$-\mu\left[v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]-$$
$$-2\,\mu\,u\frac{\partial u}{\partial x}+(\tfrac{2}{3}\,\mu+\nu)\,u\,K,\ \text{etc.}\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

§ 5. Lorsque la pesanteur agit sur le gaz, et que l'axe des z est dirigé verticalement vers le bas, on a:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = g.$$

Le gaz peut alors présenter un état d'équilibre, dans lequel la température est partout la même, et où, par conséquent, h aussi a partout la même valeur h_0. On doit avoir, en ce cas,

$$p_x = p_y = p_z = \tfrac{1}{3} \varrho h_0,$$

$$q_{x,y} = q_{y,z} = q_{z,x} = 0,$$

$$R = \tfrac{1}{2} \varrho [h_0 + 2 \vartheta (h_0)],$$

$$S_x = S_y = S_z = 0,$$

et les équations du mouvement (A_1)—(A_3) se réduisent à

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0, \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0, \quad -g \varrho + \tfrac{1}{3} h_0 \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0,$$

auxquelles, si l'on pose

$$\frac{3g}{h_0} = \varepsilon,$$

il est satisfait par

$$\varrho = D e^{\varepsilon z}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

où la constante D représente la densité du gaz pour $z = 0$.

§ 6. Considérons maintenant des écarts infiniment petits de cet état d'équilibre. Si l'on représente alors la densité par

$$\varrho = D e^{\varepsilon z} (1 + s),$$

et qu'on pose pour la valeur de h

$$h = h_0 (1 + k),$$

s et k, ainsi que u, v, w, sont infiniment petits.

On a alors

$$p_x = \tfrac{1}{3} D h_0 e^{\varepsilon z} (1 + s + k) - 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{2}{3} \mu K, \text{ etc. } \quad \ldots (6)$$

$$q_{x,y} = - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \text{ etc. } \quad \ldots (7)$$

$$R = \tfrac{1}{2} D e^{\varepsilon z} \{[h_0 + 2 \vartheta (h_0)] + \\ + [h_0 + 2 \vartheta (h_0)] s + h_0[1 + 2 \vartheta'(h_0)]k\} + \nu K \ldots (8)$$

$$S_x = \tfrac{1}{2} D e^{\varepsilon z} u[\tfrac{5}{3} h_0 + 2 \vartheta (h_0)] - \frac{\varkappa}{e} h_0 \frac{\partial k}{\partial x}, \text{ etc. } \quad \ldots (9)$$

où μ, ν, $\varkappa$ doivent être regardés comme des constantes.

En substituant ces valeurs dans les équations du mouvement, on obtient, si l'on introduit en outre l'hypothèse que l'état du gaz est devenu stationnaire,

$$K + \varepsilon w = 0 \quad \ldots (A_2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial x} [e^{\varepsilon z} (s + k)] - \mu \Delta u - \tfrac{1}{3} \mu \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \\ &\tfrac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial y} [e^{\varepsilon z} (s + k)] - \mu \Delta v - \tfrac{1}{3} \mu \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \\ &\tfrac{1}{3} D h_0 \frac{\partial}{\partial z} [e^{\varepsilon z} (s + k)] - \mu \Delta w - \tfrac{1}{3} \mu \frac{\partial K}{\partial z} - g D e^{\varepsilon z} s = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (B_2)$$

$$g D e^{\varepsilon z} w + \frac{\varkappa}{e} h_0 \Delta k = 0 \quad \ldots (C_2)$$

§ 7. Nous supposerons le gaz entièrement compris entre deux surfaces S_1 et S_2, et nous admettrons que les expressions du § 5 se rapportent à l'état d'équilibre du gaz lorsque les deux surfaces ont la même température T_0, correspondant à h_0.

Représentons-nous l'état de perturbation, dont il a été question au § 6, comme dû à ce que la surface S_1 est constamment maintenue à une température $T_0 (1 + q)$, qui diffère infiniment peu de la température primitive. Il faut alors déterminer u, v,

w et k par les équations (A_2) — $C_2)$ et par les conditions qu'en S_1 et S_2 on ait $u = v = w = 0$ (nous admettons qu'il ne s'opère pas de glissement du gaz le long de ces surfaces), et que k devienne 0 en S_2, mais prenne en S_1 la valeur prescrite q. Enfin, si la quantité totale de gaz est restée la même, on doit avoir

$$\iiint e^{\varepsilon z} s \, dx \, dy \, dz = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

où l'intégration doit être étendue sur tout l'espace compris entre S_1 et S_2.

Nous démontrerons d'abord que par ces conditions le problème est complètement déterminé. Si, en effet, *deux* systèmes de valeurs de u, v, w, s, k étaient possibles, les différences de ces valeurs devraient également représenter un état de mouvement et dans ce dernier on devrait aussi avoir, tant en S_1 qu'en S_2, $k = 0$. Or il est facile de prouver qu'on a alors nécessairement, partout, $u = v = w = s = k = 0$.

A cet effet, résolvons les équations (B_2) et (C_2) par rapport aux quantités Δu, Δv, Δw, Δk, multiplions par u, v, w, $\frac{\varkappa h_0}{e \mu} k$, prenons la somme, puis, après avoir multiplié encore une fois par $dx \, dy \, dz$, intégrons sur tout l'espace occupé par le gaz. Il vient alors :

$$\iiint \left[u \Delta u + v \Delta v + w \Delta w + \frac{\varkappa h_0}{e \mu} k \Delta k \right] dx \, dy \, dz =$$

$$= \frac{1}{3 \mu} D h_0 \iiint \left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right] [e^{\varepsilon z} (s + k)] \, dx \, dy \, dz \, -$$

$$- \tfrac{1}{3} \iiint \left[u \frac{\partial K}{\partial x} + v \frac{\partial K}{\partial y} + w \frac{\partial K}{\partial z} \right] dx \, dy \, dz \, -$$

$$- \frac{g D}{\mu} \iiint e^{\varepsilon z} w (s + k) \, dx \, dy \, dz.$$

Appliquons maintenant aux trois premières intégrales l'intégration par parties, dans laquelle les intégrales sur les surfaces

disparaissent, puisque en S_1 et S_2 on a $u = v = w = k = 0$. En ayant égard, en outre, à l'équation (A_2), on trouve:

$$-\iiint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \dots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{\varkappa h_0}{e \mu} \left\{ \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial z}\right)^2 \right\} \right] dx\, dy\, dz =$$

$$= \tfrac{1}{3} \iiint K^2\, dx\, dy\, dz.$$

Si l'on fait passer tous les termes de cette équation dans le second membre, celui-ci présente une somme de carrés, d'où l'on peut conclure que u, v, w, k doivent être constants et par conséquent, en vertu des conditions établies pour les surfaces, partout $= 0$. Il n'est ensuite pas difficile de déduire des équations (B_2) et (10), qu'on doit avoir aussi $s = 0$, et par là se trouve démontré que les équations (A_2) — (C_2), combinées avec les conditions accessoires, n'admettent qu'une seule solution.

Quand une fois on connaît partout k et conséquemment la nouvelle distribution de température, la quantité de chaleur que le corps limité par S_1 cède au gaz dans l'unité de temps est déterminée par l'intégrale:

$$-\varkappa \frac{h_0}{e} \int \frac{\partial k}{\partial n} d S_1, \dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

où n représente la normale menée vers le côté du gaz.

§ 8. La solution générale des équations (A_2) — (C_2) paraît difficile à trouver, même quand les surfaces S_1 et S_2 ont une forme simple.

Les variables u, v, w, k peuvent toutefois, si la densité et par conséquent aussi la quantité D sont suffisamment petites, être développées en séries suivant les puissances ascendantes de D.

Lorsque D est très petit, u, v, w tendent vers 0, et k vers la valeur k_0, qui est déterminée par l'équation

$$\Delta k_0 = 0,$$

combinée avec les conditions accessoires. La distribution de température est alors celle qui s'établit sous la seule influence de la conductibilité calorifique.

Les séries pour u, v, w et k doivent donc avoir la forme:

$$u = u_1 D + u_2 D^2 + u_3 D^3 + \ldots\ldots.$$

$$k = k_0 + k_1 D + k_2 D^2 + k_3 D^3 + \ldots.$$

De même, nous posons:

$$s = s_0 + s_1 D + s_2 D^2 + s_3 D^3 + \ldots.$$

Ces expressions étant substituées dans (A_2)—(C_2), on obtient, en égalant entre eux les coefficients de la même puissance de D dans les deux membres de chaque équation, une série d'équations, au moyen desquelles u_1, u_2, etc., k_1, k_2, ..., s_0, s_1, ... peuvent être déterminés.

Pour la détermination de u_1, v_1, w_1, s_0, on a d'abord

$$K_1 + \varepsilon w_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (A_3)$$

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial x}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta u_1 - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial x} = 0, \\ &\tfrac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial y}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta v_1 - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0, \\ &\tfrac{1}{3} h_0 \frac{\partial}{\partial z}[e^{\varepsilon z}(s_0 + k_0)] - \mu \Delta w_1 - \tfrac{1}{3}\mu \frac{\partial K_1}{\partial z} - g e^{\varepsilon z} s_0 = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (B^3)$$

où

$$K_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

et où k_0 est connu. Les conditions accessoires sont, aux surfaces S_1 et S_2,

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0$$

et, en outre,

$$\iiint e^{\varepsilon z} s_0 \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Lorsque k_0 est déjà déterminé de telle sorte que cette quantité prenne en S_1 la valeur prescrite q, les quantités k_1, k_2, etc. doivent, en S_1 et S_2 être égales à 0. Or, il suit de (C_2):

$$\Delta k_1 = 0,$$

de sorte qu'on a partout

$$k_1 = 0;$$

ensuite

$$\Delta k_2 = -\frac{g e}{\varkappa h_0} e^{\varepsilon z} w_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (C_3)$$

ce qui détermine k_2, après qu'on a trouvé w_1 au moyen de (A_3) et de (B_3).

§ 9. Les équations qui viennent d'être établies éprouvent encore une simplification notable si l'on admet que les dimensions de l'espace rempli de gaz est petit comparativement à $\frac{h_0}{g}$. Cette supposition revient à dire que, lorsqu'une molécule se meut sous l'influence de l'accélération g sur une distance l du même ordre que les dimensions précitées, la vitesse acquise par elle est très petite par rapport à la vitesse moléculaire; or, dans des expériences telles que celles de MM. Kundt et Warburg ou de M. Winkelmann, cela est certainement le cas.

On peut maintenant, en premier lieu, omettre dans (A_3) le terme εw_1. Car, w_1 disparaissant aux limites de l'espace, cette quantité est partout ailleurs du même ordre que $l \frac{\partial w_1}{\partial z}$, et le terme lui-même est de l'ordre $l \varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial z}$; or, comme $l \varepsilon$ est très petit, et que dans K_1 se trouve le terme $\frac{\partial w_1}{\partial z}$, on peut écrire, pour (A_3),

$$K_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Les équations (B_3) peuvent également être simplifiées. Si

l'on pose, pour abréger,

$$\frac{1}{3\mu} h_0 e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) = P, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

on a d'abord:

$$\Delta u_1 = \frac{\partial P}{\partial x},\ \Delta v_1 = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

De la dernière des équations (B_3), il résulte ensuite

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} s_0,$$

ou, en exprimant s_0 en k_0 à l'aide de (13),

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} - \varepsilon P + \frac{g}{\mu} e^{\varepsilon z} k_0.$$

Comme les variations de εP, sur l'espace occupé par le gaz, sont de l'ordre $\varepsilon l \frac{\partial P}{\partial z}$, et que εl est très petit, on peut négliger ces variations et poser, par conséquent,

$$\varepsilon P = C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

C étant une constante provisoirement indéterminée. L'équation devient alors

$$\Delta w_1 = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0 - C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

où l'on a fait, en outre, $e^{\varepsilon z} = 1$, ce qui est permis lorsqu'on choisit l'origine de façon que le plan $y\,z$ coupe la masse gazeuse.

Si l'on pose $P - Cz = Q$, les équations deviennent

$$\Delta u_1 = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \Delta v_1 = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\Delta w_1 = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{g}{\mu} k_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Il est facile de montrer que par ces équations, combinées avec (12), u_1 v_1 w_1 sont déterminés complètement et Q à une constante additive près. Q prenant ainsi la forme $Q' + C'$, où Q' est entièrement déterminé, on obtient:

$$\frac{1}{3\,\mu} h_0\, e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) - C z = Q' + C'.$$

Si par la constante C, introduite en (15), on entend la valeur dé εP pour $z = 0$, on a

$$(Q')_{(z=0)} + C' = \frac{C}{\varepsilon}$$

et

$$\frac{1}{3\,\mu} h_0\, e^{\varepsilon z} (s_0 + k_0) = Q' - Q'_{(z=0)} + \frac{C}{\varepsilon},$$

attendu que $C z$ peut être négligé vis-à-vis de $\frac{C}{\varepsilon}$. La constante C, enfin, est déterminée par la condition

$$\iiint e^{\varepsilon z}\, s_0\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Dès que u_1, v_1, w_1 sont connus au moyen de (12), (17) et (18), on trouve k_2 par l'équation (C_3), pour laquelle on peut écrire :

$$\Delta k_2 = - \frac{g\,\varepsilon}{\varkappa\, h_0} w_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

§ 10. Nous exécuterons maintenant le calcul de u_1, v_1, w_1, k_2 pour le cas où S_1 et S_2 sont des sphères concentriques, de rayons R_1 et R_2. L'origine des coordonnées sera supposée placée au centre et $R_1 < R_2$.

D'abord, de $\Delta k_0 = 0$, combiné avec les conditions accessoires, on déduit:

$$k_0 = q \cdot \frac{R_2\, R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right),$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Il n'y a maintenant qu'à chercher, n'importe par quelle voie, un système de valeurs de u_1, v_1, w_1 qui satisfasse à (12), (17) et (18), il étant déjà démontré que ces équations ne comportent qu'une solution unique.

Un pareil système s'obtient de la manière suivante.

Posons

$$u_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial z}, \quad v_1 = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial z}, \quad w_1 = -\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right),$$

où I est une fonction inconnue de r. L'équation (12) est alors satisfaite.

De (17), il suit

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\Delta I), \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(\Delta I),$$

donc

$$Q = \frac{\partial}{\partial z}(\Delta I) + f(z),$$

où f est une fonction provisoirement inconnue.

De (18) on obtient ensuite, en substituant la valeur de k_0,

$$\Delta(\Delta I) = \frac{g\,q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right) + f'(z),$$

d'où il ressort que $f'(z)$ ne peut être qu'une constante.

On trouve donc, en réunissant les constantes,

$$\Delta(\Delta I) = \frac{g\,q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_2}\left(C_1 - \frac{1}{r}\right).$$

La solution générale de cette équation est

$$I = \frac{g\,q}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\left[\frac{1}{120} C_1 r^4 - \frac{1}{24} r^3 + C_2 r^2 + C_3 r + \right.$$
$$\left. + C_4 + \frac{C_5}{r}\right], \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

où C_2, C_3, C_4, C_5 sont aussi des constantes provisoirement inconnues.

§ 11. Pour déterminer ces quantités, nous avons la condition qu'à la surface des sphères, c'est-à-dire pour $r = R_1$ et $r = R_2$, on doit avoir $u_1 = v_1 = w_1 = 0$. Or on peut exprimer les vitesses en $\frac{dI}{dr}$ et $\frac{d^2 I}{dr^2}$; il est par conséquent nécessaire, mais aussi suffisant, que ces dernières quantités disparaissent pour $r = R_1$ et $r = R_2$. Cela donne quatre relations entre les constantes C_1, C_2, C_3 et C_5 qui figurent dans $\frac{dI}{dr}$ et $\frac{d^2 I}{dr^2}$, de sorte que ces constantes peuvent précisément être déterminées. Quant à C_4, elle reste indéterminée, mais cette quantité est sans influence sur les valeurs de u_1, v_1, w_1.

Pour obtenir le résultat sous une forme simple, nous procédons de la manière suivante. Comme $\frac{dI}{dr}$ et son coefficient différentiel relativement à r doivent disparaître pour $r = R_1$ et $r = R_2$, et que $\frac{dI}{dr}$ est, d'après l'équation (20), une fonction algébrique rationnelle de r, celle-ci doit contenir le facteur $(r-R_1)^2 (r-R_2)^2$. Mais de (20) on déduit:

$$\frac{dI}{dr} = \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \left[\frac{1}{30} C_1 r^3 - \frac{1}{8} r^2 + 2 C_2 r + C_3 - \frac{C_5}{r^2}\right] \; .. \; (21)$$

Evidemment $\frac{dI}{dr}$ ne peut donc avoir que la forme

$$\frac{dI}{dr} = \frac{\eta}{r_2} (r-R_1)^2 (r-R_2)^2 (r + \vartheta) \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

où η et ϑ sont des constantes. Celles-ci doivent être déterminées de façon que (22) s'accorde avec (21), et pour cela il suffit que dans le développement de (21) le coefficient de $\frac{1}{r}$ devienne 0 et celui de r^2 : $-\frac{1}{8} \cdot \frac{gq}{\mu} \cdot \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$. De la première condition il résulte

$$\vartheta = \frac{R_2 R_1}{2 (R_2 + R_1)},$$

et de la seconde

$$\eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{g\,q}{\mu} \cdot \frac{R_2\,R_1\,(R_2 + R_1)}{(4\,R_2^2 + 7\,R_2\,R_1 + 4\,R_1^2)(R_2 - R_1)} \quad . \; . \; . \; . \; (23)$$

$\frac{d\,I}{d\,r}$, et par conséquent u_1, v_1, w_1, se trouvent ainsi complètement déterminés. Les résultats sont entièrement d'accord avec ceux que M. Oberbeck obtient pour les vitesses des courants, de sorte que, pour la discussion détaillée de la nature du mouvement, je puis renvoyer à son Mémoire.

§ 12. Pour déterminer k_2, on a maintenant, d'après (19), l'équation suivante

$$\Delta\,k_2 = \frac{g\,e}{\varkappa\,h_0}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial\,x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial\,y^2}\right),$$

laquelle, dès que I_1 est une fonction de r satisfaisant à l'équation

$$\Delta\,I_1 = I,$$

est vérifiée par

$$k_2 = \frac{g\,e}{\varkappa\,h_0}\left(\frac{\partial^2 I_1}{\partial\,x_2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial\,y^2}\right).$$

On peut toutefois poser aussi

$$k_2 = \frac{g\,e}{\varkappa\,h_0}\left[\frac{\partial^2 I_1}{\partial\,x^2} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial\,y^2} + D_1(3\,z^2 - r^2) + D_2\left(3\,\frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \right.$$
$$\left. + D_3\,\frac{1}{r} + D_4\right],$$

puisque les termes contenant les constantes inconnues D_1, D_2, D_3, D_4 donnent 0 lorsqu'on y applique l'opération indiquée par Δ. Ces constantes peuvent alors être déterminées au moyen de la condition que, pour $r = R_1$ et $r = R_2$, k_2 doit disparaître.

§ 13. Une fois k_0 et k_2 obtenus de cette manière, on peut calculer les deux premiers termes de l'expression pour la cha-

leur perdue par S_1 dans l'unité de temps. Le premier terme est, en vertu de (11),

$$W_1 = -\frac{\varkappa h_0}{e}\int\frac{\partial k_0}{\partial n}d S_1 = \frac{4\pi\varkappa h_0 q}{e}\cdot\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1},$$

et le second

$$W_2 = -\frac{\varkappa h_0}{e}\frac{D^2}{}\int\frac{\partial k_2}{\partial n}\, d S_1,$$

valeur pour laquelle on trouve

$$W_2 = \frac{1}{18}\pi g^2 q.\frac{D^2}{\mu}\cdot\frac{R_2^2 R_1^2 (R_2 - R_1)^3}{4 R_2^2 + 7 R_2 R_1 + 4 R_1^2}.$$

Si l'on veut juger du degré d'importance de ce terme, on n'a qu'à considérer le rapport

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{72}\frac{g^2 D^2}{\mu\varkappa T_0}\cdot\frac{R_2 R_1 (R_2 - R_1)^4}{4 R_2^2 + 7 R_2 R_1 + 4 R_1^2},$$

où T_0 est la température absolue correspondant à h_0.

§ 14. Dans un des appareils de MM. Kundt et Warburg, R_1, le rayon de la boule du thermomètre qui se refroidissait dans une enceinte maintenue à 0°, mesurait 0,461 cm., R_2, le rayon de l'enceinte elle-même, 2,972 cm. Calculons la valeur de $\frac{W_2}{W_1}$ pour cet appareil dans la supposition qu'à 0° il était rempli d'air ayant une tension de 760 mm. Nous avons alors, en employant le système d'unités C. G. S.,

$$D = 0{,}00129,$$

$$g = 981$$

et, puisque l'enceinte était maintenue à 0°,

$$T_0 = 273.$$

On a, en outre,

$$\mu = 0{,}00017,$$

et quant au coefficient de la conductibilité calorifique, il peut être pris $= 0{,}000052$. Ce coefficient, toutefois, est exprimé en calories, tandis que dans nos formules $\varkappa$ doit être exprimé en unités de travail. Nous avons donc à poser

$$\varkappa = 0{,}000052 \times 42400 \times 981.$$

En substituant ces diverses valeurs, on obtient

$$\frac{W_2}{W_1} = 0{,}0003,$$

de sorte que dans cet appareil, pour des différences de température infiniment petites, l'influence des courants dus à la chaleur, même sous la pression d'une atmosphère, doit être insensible. Cela n'empêche pas, toutefois, que dans d'autres appareils le résultat ne puisse être tout différent. Quand R_2 est pris plus grand, $\frac{W_2}{W_1}$ devient aussi plus grand; et si la même boule de thermomètre était placée dans une enceinte sphérique d'un rayon de 30 cm., on aurait

$$\frac{W_2}{W_1} = 0{,}7,$$

et l'influence des courants calorifiques serait donc, même pour des différences de température infiniment petites, parfaitement appréciable.

§ 15. Il est clair maintenant que, dans des expériences telles que celles de MM. Kundt et Warburg, l'influence des courants occasionnés par la chaleur ne peut nullement être expliquée si l'on regarde la différence de température comme infiniment petite. Aussi est-il facile de montrer que les vitesses, qui prennent naissance dans ces expériences, sont beaucoup trop grandes pour qu'on puisse parler encore d'un dérangement infiniment petit de l'équilibre.

Afin de me rendre compte de la grandeur de ces vitesses, j'ai calculé, pour l'appareil dont il a été question au paragraphe

précédent, la valeur de la vitesse $w_1 D$ en un point situé dans le plan horizontal passant par le centre de la boule, à une distance de 1 cm. de ce centre. En prenant, pour simplifier, $R_1 = 0,5$ et $R_2 = 3$, je trouve approximativement

$$w_1 D = 0,04 \frac{D g}{\mu} q,$$

et par conséquent, dans le cas où l'air a (à 0°) une tension de 1 atmosphère

$$w_1 D = 300 q.$$

Pour $q = \frac{1}{100}$, valeur correspondant à une différence de température de 2°,73, cette vitesse serait de 3 cm. par seconde.

Au point choisi pour ce calcul, la vitesse est plus grande qu'en la plupart des autres points; mais on n'en peut pas moins conclure du résultat que, déjà pour des différences de température de quelques degrés, il peut se produire des vitesses dépassant 1 cm. par seconde.

§ 16. Dans les problèmes où le frottement interne et la conductibilité calorifique n'entrent pas en jeu, par exemple, lorsqu'il s'agit du mouvement du son dans un espace de grandes dimensions, on peut, sans inconvénient, regarder de pareilles vitesses comme infiniment petites. Mais cela n'est plus permis dès que, comme ici, tout dépend du frottement interne et de la conductibilité. Pour s'en assurer, on n'a qu'à comparer les termes négligés au § 6 avec ceux que nous avons conservés.

Considérons, par exemple, la quantité S_x, ayant rapport à la différence des quantités de chaleur qui passent dans les deux sens, par unité de temps, à travers un plan perpendiculaire à l'axe des x. Dans l'expression complète de S_x entrent le terme

$$\tfrac{1}{2} \varrho u \left[\tfrac{5}{3} h + 2 \vartheta (h)\right],$$

relatif à la convection de la chaleur, et le terme

$$\frac{\varkappa}{e} \frac{\partial h}{\partial x},$$

qui se rapporte à la conductibilité. Après avoir posé $h = h_0 (1 + k)$, nous avons négligé le terme

$$\tfrac{1}{2} D u . \tfrac{5}{3} h_0 k$$

(pour simplifier nous ne tenons pas compte de $\vartheta(h)$) et par suite la convection proprement dite; le terme

$$\frac{\varkappa h_0}{e} \frac{\partial k}{\partial x},$$

au contraire, a été conservé.

Comparons ces deux termes. Si quelque part dans l'espace rempli de gaz on a $k = 0$, et que l soit une ligne du même ordre que les dimensions de cet espace, k est de l'ordre $l \frac{\partial k}{\partial x}$, et par conséquent le rapport des deux termes précités est de l'ordre

$$\frac{D u l e}{\varkappa}.$$

Si l'on veut que le premier terme ne dépasse pas le dixième du second, il faudra, donc, approximativement, qu'on ait

$$u < \frac{\varkappa}{10 D l e}$$

ou

$$u < \frac{\varkappa T_0}{10 D l h_0}.$$

Pour l'air à la pression atmosphérique et à 0_0 C, cette inégalité devient, si l'on pose $l = 5$ cm.,

$$u < 0{,}004 \text{ cm. par sec.}$$

On voit donc que des vitesses réellement petites, inférieures de beaucoup à celles qui se produisent à la suite de différences de température de quelques degrés, ne peuvent plus être regardées comme infiniment petites.

D'après ce résultat il est très possible que, même dans le cas des vibrations sonores, provenant par exemple d'un dia-

pason, le dérangement d'équilibre ne puisse plus être supposé infiniment petit, lorsqu'on tient compte du frottement et de la conductibilité calorifique. Plus tard, j'examinerai jusqu'à quel point cette considération peut contribuer à expliquer le retard des ondes sonores dans les tuyaux étroits.

§ 17. Dès que le dérangement d'équilibre ne peut plus être regardé comme infiniment petit, la solution des problèmes sur le mouvement des gaz devient très difficile. On peut toutefois rechercher si, sans élaborer cette solution pour un cas spécial, il ne serait pas possible d'indiquer comment elle dépend de différentes circonstances.

Figurons-nous, dans un cas A, une masse gazeuse dont l'état de mouvement satisfait aux équations (A_1), (B_1) et (C_1), ainsi qu'aux conditions accessoires. Définissons ensuite, de la manière suivante, un second état de mouvement B, pour une autre masse gazeuse. Soient, dans cet état B, toutes les dimensions α fois plus grandes que dans A, et entendons par points correspondants, en A et B, ceux dont les coordonnées sont dans le rapport de 1 à α. De même, appelons moments correspondants, en A et B, ceux pour lesquels les temps, écoulés à partir d'un instant fixe, sont entre eux comme 1 et β.

Représentons-nous, enfin, que dans l'état B, en un point donné et à un moment donné, les vitesses u, v, w soient γ fois, le carré moyen de la vitesse moléculaire ε fois, et les quantités μ, $\frac{\varkappa}{e}$ et ν respectivement η, ϑ, ζ fois plus grandes qu'au point correspondant et au temps correspondant dans l'état A. Les quantités α, β, γ. δ, ε, η, ϑ, ζ sont des constantes, et il s'agit de savoir si on peut les déterminer de manière que le second état de mouvement soit également possible, c'est-à-dire, qu'il satisfasse aux équations du mouvement.

Or, en premier lieu, il ressort de (1) et (2) que, lorsqu'on a

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon}$$

et

$$\alpha = \frac{\eta}{\delta \sqrt{\varepsilon}},$$

p_x, p_y, p_z, $q_{x,y}$, $q_{y,z}$, $q_{z,x}$ dans B sont $\delta\,\varepsilon$ fois plus grands que dans A.

De (3) il suit de même, que, lorsqu'on a

$$\vartheta(h) = C\,h$$

(C étant pour les deux cas une même constante) et en outre

$$\zeta = \eta,$$

R est, dans B, $\delta\,\varepsilon$ fois plus grand que dans A.

Enfin, de (4), il résulte que, dès qu'on a

$$\vartheta = \eta,$$

S_x, S_y, S_z sont, dans B,

$$\delta\,\varepsilon\,\sqrt{\varepsilon}$$

fois plus grands que dans A.

De la considération des équations du mouvement on peut ensuite déduire que, lorsque les accélérations dues aux forces extérieures doivent être les mêmes en B qu'en A, on doit avoir

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon}}$$

et

$$\alpha = \varepsilon,$$

pour que l'état B satisfasse également aux équations du mouvement.

Les conditions trouvées peuvent être résumées ainsi:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = \varepsilon, \quad \beta = \gamma = \sqrt{\varepsilon}, \\ \eta = \zeta = \vartheta, \\ \delta = \dfrac{\eta}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Quand ces conditions sont remplies, les quantités de chaleur qui, dans les états A et B, passent dans l'unité de temps par des surfaces homologues, sont entre elles comme 1 à $\eta\,\varepsilon^2$.

§ 18. La première question est maintenant de savoir si l'on peut comparer de cette manière des expériences où le même gaz, avec des densités différentes, est introduit dans le même appareil, entre des surfaces ayant dans les deux cas la même température. On devrait avoir alors $\alpha = 1$ et $\varepsilon = 1$, donc aussi $\beta = \gamma = 1$. Or comme, à température égale, le coefficient de frottement ne change pas avec la densité, il faudrait qu'on eût de même $\eta = 1$, et alors notre dernière condition donne aussi $\delta = 1$, de sorte que l'application dont il s'agit n'est pas possible. Même en modifiant simultanément les dimensions de l'appareil, on ne peut augmenter la densité du gaz, aussi longtemps du moins que les températures doivent rester les mêmes. Car de cette dernière condition il suit $\varepsilon = 1$, ce qui exige de nouveau $\alpha = 1$ et $\delta = 1$.

Mais deux expériences dans lesquelles le même gaz, pris successivement à des températures et à des densités différentes, est introduit dans des appareils de dimensions différentes, mais de formes semblables, peuvent être comparées entre elles, pourvu que les coefficients μ, $\varkappa$ et ν dépendent de la même manière de la température, de sorte qu'on ait $\eta = \zeta = \vartheta$. Si alors les températures absolues dans les deux appareils sont entre elles comme 1 et ε, les dimensions dans le même rapport, et les densités comme μ et $\frac{\mu'}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ (μ et μ' étant les coefficients du frottement dans les deux cas), on peut, à l'aide des formules ci-dessus communiquées, déduire les vitesses hydrodynamiques et la quantité de chaleur transmise dans l'un des deux cas, des valeurs qu'elles ont dans l'autre.

On peut aussi comparer des expériences où, dans des appareils différents, sont employés des gaz différents qui se trouvent aux mêmes températures, du moins, lorsque $\frac{\vartheta(h)}{h}$ a pour les deux gaz la même valeur C (en d'autres termes, quand le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant est le même pour les deux gaz) et lorsque les valeurs de

μ, $\frac{\varkappa}{e}$ et ν pour l'un des gaz se déduisent de celles pour l'autre au moyen de la multiplication par un même facteur indépendant de la température (ce qui est le cas quand les molécules des deux gaz peuvent être regardées comme des sphères élastiques). Ce facteur est alors la valeur de η, ζ et ϑ. Pour ε on doit évidemment prendre le rapport inverse des densités des gaz à pression égale et à température égale, et les formules font alors connaître dans quel rapport doivent être les dimensions des appareils et les densités du gaz dont ils sont remplis, pour que les deux cas soient entièrement comparables.

Enfin, il est facile de voir que, lorsqu'on expérimente avec deux gaz différents dans le même appareil, on obtiendra des cas comparables entre eux, en réglant les températures de telle sorte que h ait la même valeur dans les deux cas et en prenant les densités proportionnelles au coefficient du frottement.

§ 19. Cette considération des états correspondants peut, naturellement, être employée aussi dans d'autres problèmes sur le mouvement des gaz. Remarquons, à cet égard, que, dès qu'il n'y a pas à tenir compte de forces extérieures, la condition $\alpha = \varepsilon$, résultant de (B_1), est supprimée, ce qui rend possible une plus large application du principe.

En terminant, qu'il me soit permis de faire observer que la considération des états de mouvement correspondants peut être rendue entièrement indépendante des équations du mouvement, si l'on considère les molécules gazeuses comme des sphères élastiques, n'exercant pas d'attraction les unes sur les autres. On peut alors raisonner comme le fait M. Kamerlingh Onnes, dans sa „Théorie générale des fluides''. Lors, en effet, qu'un gaz, donc un système de sphères élastiques, se meut entre ou autour d'autres corps, qui eux-mêmes peuvent être en mouvement ou en repos, on peut, de différentes manières, déduire d'autres états de mouvement. Premièrement, on peut faire s'opérer les mêmes changements de lieu en une durée qui soit un certain nombre de fois plus grande ou plus petite que dans

le premier état. En second lieu, un état de mouvement est possible dans lequel le système mobile reste à chaque instant semblable de forme au système dans le premier état. Les dimensions des molécules et celles de l'espace dans lequel elles se meuvent sont alors toutes agrandies ou réduites un certain nombre de fois, et les vitesses du mouvement sont aussi changées dans le même rapport. Enfin, on peut encore, lorsqu'un système possède un certain état de mouvement, attribuer les mêmes mouvements à un second système, qui ne se distingue du premier qu'en ce que toutes les masses y sont changées dans le même rapport.

Quand des forces extérieures agissent, comme dans le cas des courants calorifiques que nous venons de considérer, il faut faire attention que, lors du passage d'un état de mouvement à l'autre, ces forces ne doivent pas, en général, rester les mêmes.

SUR

L'EFFET UTILE DU COURANT DANS LES LAMPES À INCANDESCENCE,

PAR

E. VAN DER VEN.

Il m'a toujours paru que, dans les recherches où il s'agissait de déterminer le nombre des unités de travail consommées par les lampes à incandescence, on n'avait pas tenu simultanément compte de l'intensité lumineuse obtenue par ce travail. Des expériences comparatives faites à ce sujet sur des lampes de différents systèmes manquent entièrement, au moins à ma connaissance, et les résultats de quelques observations isolées, dont la plupart ont d'ailleurs été communiqués par des Sociétés intéressées dans la question, ne nous offrent aucun moyen de porter un jugement sur la méthode qui les a fournis.

La circonstance que j'avais à ma disposition quelques lampes à incandescence de différents systèmes et que, pour les déterminations photométriques, j'étais assuré de l'obligeant concours de M. A.-J. van Eyndhoven, contrôleur municipal de l'éclairage au gaz, m'a engagé a essayer de remplir, autant que possible, la lacune que je viens de signaler.

Mon étude a porté sur les lampes suivantes: trois lampes d'Edison (petit modèle), deux de Swan, deux de Maxim — ne différant l'une de l'autre que par la forme du ballon en verre, ovoïde ou sphérique, — et une de Lane-Fox.

Les observations ont eu lieu dans deux pièces contigues du laboratoire municipal affecté à l'examen du gaz; dans l'une de ces pièces est placé le photomètre, tandis que dans l'autre se trouvaient les instruments nécessaires à la détermination de l'intensité du courant.

Le photomètre est du système Evans et construit par William Sugg, de Londres. Pour l'exécution des expériences, on suivait exactement la méthode indiquée par le *Gaz-Referees* de Londres. Les bougies employées étaient des bougies de blanc de baleine (bougies-étalons anglaises), dont l'intensité lumineuse normale est celle qu'elles possèdent quand le poids de la matière grasse brûlée s'élève à 7,776 grammes par heure; on les pesait à l'aide de la balance de Keates, et dans le résultat de l'observation il était tenu compte de la consommation en bougie. Les déterminations photométriques sont les moyennes de *dix* observations, accomplies en autant de minutes. [1])

L'intensité du courant était mesurée à l'aide d'une boussole des tangentes, disposée selon le système de Gaugain; les indications correspondantes sont les moyennes de trois observations, faites au commencement, au milieu et parfois à la fin de chaque détermination. La réduction de ces indications a été exécutée au moyen du voltamètre, pour huit déviations différentes, distribuées sur l'espace que l'aiguille avait parcouru lors des observations.

La détermination des résistances, en tant que celles-ci n'étaient pas déduites des observations elles-mêmes, eut lieu par le galvanomètre universel de Siemens, c'est-à-dire suivant la méthode de Wheatstone.

---

[1]) Les cahiers originaux, tant des observations photométriques que des autres, seront publiés dans les *Archives du Musée Teyler*, nouvelle série, 3e partie.

Afin de pouvoir juger jusqu'à quel point la force électromotrice de la pile restait constante au cours du travail, on introduisait chaque fois, entre deux expériences consécutives, une résistance de 100 U. S. dans le circuit et on notait la déviation (α) du galvanomètre; les déviations (β) sont les moyennes de celles qui étaient observées lorsqu'une lampe se trouvait intercalée dans le circuit.

Le nombre des éléments de Bunsen était de 32.

9 févr. 1882.

Désignation de la lampe.	α	β	Intensité lumineuse, en bougies normales.
Swan A	72°	82°	13.23
„ B	72°	82°12′	11.71
Maxim (ov.) . .	72°	84°40′	14.79
„ (sphér.)	72°	84°20′	11.67
Lane Fox . . .	72°	83°46′	6.83
Maxim (ov.) . .	72°	84°4′	11.39
„ (sphér.)	72°	84°40′	13.47
Swan B	72°	82°20′	11.73
„ A	72°	82°	13.31
Edison *a*	71°40′	77°40′	6.05
„ *b*	71°40′	77°10′	7.14
„ *c*	71°40′	76°40′	5.60

Comme la pile montrait déjà un certain affaiblissement et que, avec le nombre d'éléments employés, on ne paraissait pas pouvoir atteindre aisément l'intensité lumineuse — 8 bougies normales — que M. Edison lui-même attribue ordinairement à ses lampes de petit modèle, cinq nouveaux éléments furent ajoutés le lendemain; on obtint alors:

10 févr. 1882.

Désignation de la lampe.	α	β	Intensité lumineuse, en bougies normales.
Edison *a*	74°	80°10′	12.80
„ *b*	74°	79°40′	14.64
„ *c*	74°	79°10′	12.22

Tout d'abord je dois faire, à propos de ces observations, la remarque suivante. Elles montrent que pour toutes les lampes, sans exception, la résistance est moindre que 100 U. S. Ce résultat ne s'accordait nullement avec des déterminations que j'avais exécutées antérieurement sur la résistance des fils de charbon à la température ordinaire. J'avais trouvé alors, comme moyennes de trois observations:

Swan A	81.3	U. S.	Lane Fox . .	79.1	U. S.
„ B	79.6	„	Edison *a* . .	118.9	„
Maxim (ov.) . .	61.7	„	„ *b* . .	124.7	„
„ (sphér.) .	74.4	„	„ *c* . .	158.0	„

Ayant fait passer à travers les fils de charbon le courant de 40 éléments de Bunsen, courant par lequel tous ces fils étaient portés au rouge-blanc, et l'ayant ensuite interrompu à l'aide d'un commutateur, qui en outre, au même instant, envoyait le courant d'un élément de Daniell dans le galvanomètre universel, j'obtins, pour la résistance des fils encore chauds:

Swan A	60.7	U. S.	Lane Fox . .	68.1	U. S.
„ B	60.3	„	Edison *a* . .	111.2	„
Maxim (ov.) . .	44.2	„	„ *b* . .	114.3	„
„ (sphér.) .	55.4	„	„ *c* . .	125.5	„

L'aiguille ne s'arrêta d'ailleurs qu'un instant, et en moins de deux minutes la résistance était revenue à la valeur ci-dessus indiquée.

Mes observations actuelles, après chacune desquelles j'avais déterminé l'intensité du courant pour la résistance relativement considérable de 100 U. S., fournissaient toutefois, d'elles-mêmes, le moyen d'arriver à une connaissance plus exacte de la résistance des fils incandescents.

Si l'on désigne par S la résistance dans le fil, par r celle dans la boussole des tangentes, par r' celle dans le reste du circuit, par R la résistance intérieure, et par R' l'ensemble des trois résistances nommées en dernier lieu, on a

$$\frac{100 + R'}{S + R'} = \frac{tang\,\beta}{tang\,\alpha} = p$$

$$\text{d'où } S = \frac{100 - (p - 1)\,R'}{p}.$$

. . . .

Comme les résistances des bobines de M. Siemens sont déterminées à une température de 20° C. il faudra encore tenir compte de l'augmentation de la température, produite par les courants d'une grande intensité.

Or, en faisant passer par la bobine 100 U. S. un courant qui déviait de 74° l'aiguille de la boussole des tangentes, tandis que la bobine était préservée, par de la ouate, de tout refroidissement rapide, je trouvai que, si la commutation du courant s'opérait avec la même rapidité que dans l'expérience ci-dessus décrite, l'aiguille du galvanomètre universel restait à 0° lorsque cet appareil indiquait une résistance de 104,9 U. S.; le refroidissement lent s'accusait d'ailleurs par le mouvement lent de l'aiguille, laquelle, au bout de quelque temps, ne pouvait être ramenée à 0° que si l'appareil marquait une résistance de 100 U. S.

Nous avons donc:

9 févr. 1882. 32 Eléments de Bunsen.

Désignation de la lampe.	Indic. de la bouss. pour $104.9+R'$	Indic. de la bouss. pour $S+R'$	p	$S=\frac{104.9-(p-1)R'}{p}$
Swan A	72°	82°	2.312	45.4 — 0.56 R'
„ B	72°	82°16′	2.393	43.4 — 0.58 R'
Maxim (ov.) . .	72°	84°40′	3.480	31.1 — 0.71 R'
„ (sphér.)	72°	84°12′	3.198	32.8 — 0.70 R'
Lane Fox . . .	72°	83°46′	2.975	35.3 — 0.66 R'
Edison *a* . . .	71°40′	77°40′	1.516	69.2 — 0.34 R'
„ *b* . . .	71 40	77°10′	1.455	72.1 — 0.31 R'
„ *c* . . .	71 40	76°40′	1.398	75.0 — 0.29 R'
10 févr. 1882.	37 Eléments de Bunsen.			
Edison *a* . . .	74°	80°10′	1.654	60.5 — 0.4 R'
„ *b* . . .	74°	79°40′	1.573	63.6 — 0.37 R'
„ *c* . . .	74°	79°40′	1.498	66.8 — 0.33 R'

Il restait maintenant à déterminer la valeur de chacune des parties de R'.

Comme moyenne de quatre observations, je trouvai, à l'aide du galvanomètre universel,

pour $r + r'$,	avec une résistance comparative de	1 U.S.,	. 0,99 U.S.
» r seule,	» » » » »	1 » »	. 0,77 » »
» r' »	» » » » »	0,1 » »	. 0,18 » »

d'où, en moyenne,

$$r + r' = 0{,}97 \text{ U. S.}$$

En opposant 16 des éléments aux 16 autres, avec une bobine de résistance comparative de 10 U. S., j'obtins pour la résistance intérieure de 32 éléments, en moyenne de quatre déterminations:

$$R = 15{,}4 \text{ U. S.},$$

et pour celle de 36 éléments, opposés 18 à 18,

$$R = 17{,}1 \text{ U. S.},$$

d'où, pour la résistance de 37 éléments,

$$R = 17{,}6 \text{ U. S.}$$

On a donc, pour les observations des deux jours:

9 févr. $R' = R + r + r' = 16{,}37$ U. S.

10 » $R' = R + r + r' = 18{,}57$ U. S.

La substitution de ces valeurs donne:

Swan A	S=36.2 U.S.	ou 0.45	de la résistance à la temp. ord.
» B	33.9 »	» 0.43	»
Maxim (ov.) . .	19.6 »	» 0.32	»
» (sphér.)	21.3 »	» 0.29	»
Lane Fox . . .	24.5 »	» 0.31	»
Edison *a* . . .	62.9 »	» 0.53	»
» *b* . . .	66.3 »	» 0.53	»
» *c* . . .	69.6 »	» 0.50	»

et pour le courant plus fort:

Edison *a* . . .	55.9 U.S.	ou 0.47	»
» *b* . . .	59.8 »	» 0.48	»
» *c* . . .	64.8 »	» 0.47	»

Pendant qu'on opérait la réduction des indications galvanométriques, la hauteur moyenne du baromètre était de 773 mm., celle du thermomètre de 15° C. Comme résultat de huit déterminations, faites pour des déviations qui comprenaient tout l'espace sur lequel l'aiguillle s'était mue, je trouvai que, pour une déviation de 80°30′, il s'était dégagé, en 315,5 secondes, 40 centimètres cubes d'hydrogène. Ramené à 0° C et 760 mm., ce résultat devient 38,563 cm³ en 315,5 secondes.

Il suit de là (9 févr.):

Désignation de la lampe.	β	H. dégagé en 311.5 sec. à 0° C. et 760° mm.			Intensité du courant en ampères.
Swan A	82°	45.916 cm³	=	0.004114 gr.	1.25
„ B	82°16′	47.520 „	=	4258 „	1.29
Maxim (ov.) . .	84°30′	67.017 „	=	6005 „	1.82
„ (sphér.)	84°12′	63.529 „	=	5692 „	1.76
Lane Fox . . .	83°46′	59.080 „	=	5294 „	1.60
Edison *a*	77°40′	29.514 „	=	2644 „	0.80
„ *b*	77°10′	28.327 „	=	2538 „	0.77
„ *c*	76°40′	27.227 „	=	2440 „	0.74
et (10 févr.)					
Edison *a*	80°10′	37.230 „	=	3336 „	1.01
„ *b*	79°40′	35.392 „	=	3171 „	0.96
„ *c*	79°10′	33.721 „	=	3021 „	0.92

Réduisant en ohms les résistances exprimées en unités de Siemens, nous obtenons:

(9 févr.)	*S* en ohms.	*S+R′* en ohms.	$\frac{I^2 r}{9.812}$ en kilogrammètres par sec. dans le fil de charbon.	dans le circuit entier.	Effet utile.
Swan A . . .	33.07	48.04	5.27	7.66	68 %
„ B . . .	30.97	45.97	5.25	7.80	67 %
Maxim (ov.) .	17.91	32.90	6.04	11.11	54 %
„ (sphér.)	19.46	34.45	6.14	10.88	56 %
Lane Fox . .	22.38	37.38	5.84	9.75	60 %
Edison *a* . . .	57.37	72.84	3.74	4.73	79 %
„ *b* . . .	60.58	75.59	3.66	4.56	80 %
„ *c* . . .	63.59	78.57	3.48	4.30	80 %
(10 févr.)					
Edison *a* . . .	51.07	68.18	5.31	7.10	74.8 %
„ *b* . . .	54.94	73.57	5.16	6.91	74.7 %
„ *c* . . .	59.23	76.32	5.01	6.46	77.4 %

Si l'effet utile, surtout pour les lampes de Maxim et de Lane Fox, est si faible, cela tient principalement à ce que la résistance intérieure de la pile a une valeur relativement considérable. Avec les lampes de Swan et d'Edison il faudrait donner à chaque élément au moins une section double, avec celles de Maxim et de Lane Fox au moins une section triple, pour obtenir un effet utile satisfaisant, ou bien il faudrait avoir à sa disposition assez d'éléments pour qu'on pût les combiner en un nombre correspondant de séries. L'emploi des machines électrodynamiques, dont on peut accroître la force électromotrice — le champ magnétique étant maintenu constant — non seulement en donnant plus de longueur et d'épaisseur au fil qui recouvre l'anneau, mais aussi en augmentant la vitesse de rotation, permet d'atteindre le but d'une manière bien plus simple. Sous ce rapport, la pile le cède de beaucoup à tout appareil électromagnétique; elle lui serait seulement comparable si, pour accroître la force électromotrice d'un semblable appareil, on n'avait d'autre ressource que d'augmenter la longueur du fil et, pour réduire proportionnellement la résistance intérieure, d'autre moyen que d'augmenter la section du fil.

Rapprochons maintenant les uns des autres les résultats des observations galvanométriques et des observations photométriques, en n'ayant égard, pour les lampes d'Edison, qu'aux observations dans lesquelles l'intensité lumineuse a atteint une valeur au moins égale à celle qui est attribuée à ces lampes par l'inventeur; on obtient alors le tableau suivant:

	Bougies normales.	Travail exigé.
Swan A	13.27	0.070 Chev. vap.
„ B	11.72	0.070 „
Maxim (ov.) . . .	14.13	0.080 „
„ (sphér.) . .	11.53	0.082 „
Lane Fox	6.83	0.078 „
Edison *a*	12.80	0.070 „
„ *b*	14.64	0.070 „
„ *c*	12.22	0.067 „

Ainsi, lorsque la vitesse et la résistance intérieure de la machine électrodynamique et la résistance extérieure du conducteur principal et de ses dérivations sont réglées de telle sorte que 85 % du travail appliqué à la machine soient employés utilement, une lumière d'environ 13 bougies normales, c'est-à-dire une lumière à peu près équivalente à celle des réverbères ordinaires de nos rues, peut être alimentée, dans les systèmes de Swan et d'Edison, avec une dépense de 0,08 cheval-vapeur, et dans celui de Maxim avec une dépense de 0,09. D'après cela, si l'on se sert d'un moteur à gaz fournissant un cheval-vapeur par mètre cube de gaz brûlé en une heure, — et si l'on suppose que dans une exploitation sur assez grande échelle la perte de travail occasionnée par la transmission de la force à la machine électrodynamique et par la résistance dans la machine ouverte peut être négligée, — on trouve que, le prix moyen du gaz étant calculé à raison de fr. 0,20 le mètre cube, cent lampes de Swan et d'Edison consommeront pour environ fr. 1,60 de gaz par heure, et cent lampes de Maxim pour environ fr. 1,80.

La comparaison des expériences exécutées sur les lampes d'Edison le 10 février, avec celles du jour précédent, montre qu'une augmentation relativement légère de l'intensité du courant accroît notablement le pouvoir lumineux des fils de charbon. Pour mieux me rendre compte de cet accroissement, j'ai porté le nombre des éléments à 40, ce qui m'a donné les résultats suivants:

						Int. lumin.
Edison	*a*	$\alpha = 81°30'$	correspondant	à 1.15	ampères.	17.6 B.N.
„	*b*	$\alpha = 81°10'$	„	„ 1.10	„	21.2 „
„	*c*	$\alpha = 80°40'$	„	„ 1.03	„	21.5 „

Il ne sera certainement pas sans intérêt de déterminer, par des expériences ultérieures, le rapport exact entre la quantité de lumière émise et la température du fil.

Pour pouvoir juger de la valeur des observations et de l'exactitude des résultats qui en ont été déduits, j'ai calculé le

tableau suivant de la force électromotrice d'un élément de Bunsen:

(9 févr.)	amp.	omhs	volts	volts
Swan A	$I=1.25$	$S+R'=48.04$	$32\,E=60.05$	$1\,E=1.88$
„ B	1.29	45.97	59.30	1.85
Maxim (ov.) . .	1.82	32.90	59.88	1.87
„ (sphér.)	1.76	34.45	60.62	1.89
Lane Fox . . .	1.60	37.38	59.82	1.87
Edison *a*	0.80	72.84	58.27	1.82 [1])
„ *b*	0.77	75.59	58.20	1.82
„ *c*	0.74	78.57	58.14	1.82
(10 févr.)				
Edison *a*	1.01	68.18	$37\,E=68.68$	1.86
„ *b*	0.96	73.57	70.63	1.90
„ *c*	0.92	76.32	70.21	1.90

La moyenne de toutes ces déterminations est 1,86 volts, avec une erreur probable de ± 0,21 dans chaque observation et une erreur probable de ± 0,068 volts dans le résultat. Si l'on néglige à la fois les observations où la pile était déjà sensiblement affaiblie et celles où on l'avait renforcée de cinq nouveaux couples, le résultat reste le même et son erreur probable (± 0,06) n'éprouve qu'une réduction légère.

Les déterminations de M. Bosscha [2]) donnent, pour la force électromotrice d'un élément de Daniel, 1,0258 volts; d'après nos calculs, 1,82 est donc le nombre par lequel il faut multiplier cette force pour avoir celle d'un élément de Bunsen. Dans nos éléments, l'acide sulfurique dilué avait la composition $S\,O^3+8\,A_q$, tandis que l'acide nitrique possédait une densité de 1,325; or, il résulte des observations de Poggendorff [3]) que, lorsqu'on emploie les acides

$S\,O^3 + 4\,A_q$, Acide nitrique de 1,33 p. s.
et $S\,O^3 + 12\,A_q$, „ „ „ 1,33 „ „,

les nombres correspondants sont 1,85 et 1,76.

[1]) Les observations originales montrent que le courant était notablement affaibli.

[2]) Poggendorff's *Annalen*, t. XCIV, p. 172.

[3]) *Ibid.*, t. LIII, p. 345.

Le calcul des calories qui, d'après les observations, ont été développées dans la pile et des quantités de zinc qui y correspondent, donne les résultats suivants:

(9 févr.)	*H* en 315^s.5	*H* en 1^s	*Zn* en 1^s dans chaque élém.	*Zn* en 1^s dans 32 élém.	Km. calc. par sec.	Cal. (1 gr. 1°C.)
	gr.	gr.	gr.	gr.		
Swan A . . .	0.004114	0.0000130	0.000425	0.0136	7.66	18.09
„ B . . .	4258	135	440	141	7.80	18.42
Maxim (ov.) .	6005	190	619	198	11.11	26.23
„ (sphér.)	5692	180	587	188	10.88	25.70
Lane Fox . .	5294	168	548	175	9.75	23.02
Edison *a* . .	2644	084	274	088	4.73	11.17
„ *b* . .	2538	080	261	083	4.56	10.77
„ *c* . .	2440	077	251	080	4.30	10.54
(10 févr.)				dans 37 él.		
Edison *a* . .	3336	106	346	0.0128	7.10	16.77
„ *b* . .	3171	101	327	121	6.91	16.32
„ *c* . .	3021	096	322	119	6.46	15.25

Nous avons donc:

(9 févr.)						
Swan A . . .	18.09 :	0.0136 =	1330.1	cal. (1 gr. 1° C.)	par gr. de zinc	en 1 sec.
„ B . . .	18.42	141	1306.4	„	„	„
Maxim (ov.) .	26.23	198	1324.7	„	„	„
„ (sphér.)	25.70	188	1367.0	„	„	„
Lane Fox . .	23.02	175	1315.4	„	„	„
Edison *a* . . .	11.17	088	1269.3	„	„	„
„ *b* . . .	10.77	083	1297.6	„	„	„
„ *c* . . .	10.54	080	1317.5	„	„	„
(10 févr.)						
Edison *a* . . .	16.77 :	0.0128 =	1310.2	„	„	„
„ *b* . . .	16.32	121	1348.7	„	„	„
„ *c* . . .	15.25	119	1281.5	„	„	„

$$\frac{14468.4}{11} = 1315.3\,,$$

c'est-à-dire, avec une erreur probable de $\pm$ 5,5, le nombre 1315,3 pour les calories (1 gr. 1° C.) développées par gramme de zinc consommé en une seconde. Si la force électromotrice avait été celle d'un couple de Daniell et par conséquent, suivant le résultat de notre calcul, 1,82 fois plus petite, le nombre des calories dégagées par seconde aurait été de $\frac{1315,3 \pm 5,5}{1,82} = 722,7 \pm 3$ pour une consommation de 1 gramme de zinc. Or ce nombre s'accorde de nouveau assez bien avec celui des calories (714) qui sont produites, suivant Favre et Silbermann, quand un gramme de zinc est dissous dans du sulfate de cuivre.

L'accord manifesté par ce calcul de contrôle et par le précédent, plaide à la fois en faveur des données qui y ont servi et en faveur de la vérité de ce fait, que la résistance dans des fils de charbon chauffés au rouge-blanc est plus petite que la moitié de la résistance à la température ordinaire. Une inexactitude, sous ce rapport, pèse en effet de tout son poids sur la détermination de la force électromotrice du couple de Bunsen, tandis qu'elle passe, agrandie $\frac{I^2}{9,812} \times \frac{1000}{423,5} \times$ $\times \frac{1}{\text{le nombre de gr. Zn par sec.}}$ fois, dans le nombre des calories (1 gr. 1° C) développées dans ce couple par gramme de zinc consommé; c'est-à-dire, agrandie environ 27, 40, 35 ou 18 fois, suivant que ce nombre est déduit d'observations faites sur les lampes de Swan, de Maxim, de Lane Fox ou d'Edison.

SUR

L'OSMOSE DES SELS,

CONSIDÉRÉE EN RAPPORT AVEC LA CONSTITUTION DES SOLUTIONS,

PAR

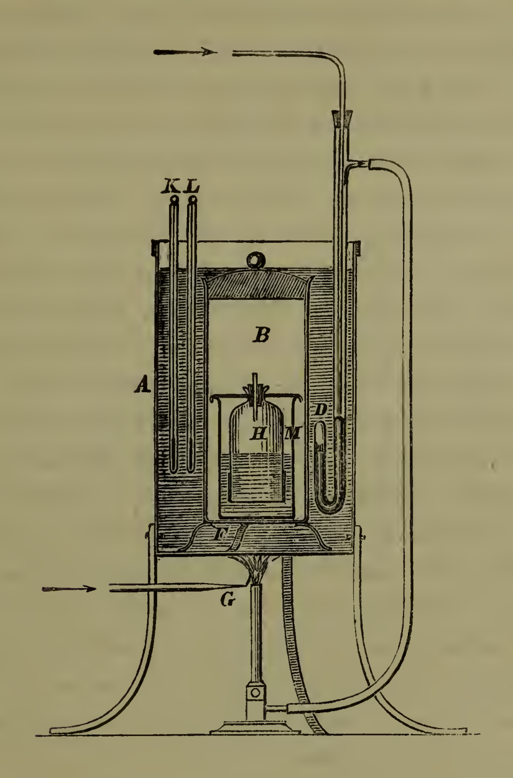
J. E. ENKLAAR.

---

§ 1. *Méthode suivie pour l'examen.* M. Lothar Meyer, dans son ouvrage bien connu, „*Die modernen Theorien der Chemie und ihre Bedeutung für die chemische Statik*", a écrit ce qui suit: „Le plus sûr appui pour la détermination des poids moléculaires qui existent réellement à l'état liquide se trouvera vraisemblablement dans l'étude approfondie des mouvements internes des liquides, en particulier, du frottement, de la conductibilité calorifique et de la diffusion. Il est vrai que la théorie de ces phénomènes a elle-même encore besoin d'une élaboration plus spéciale, fondée sur une conception bien nette de la constitution des molécules; mais, ce qui manque avant tout, ce sont les observations nécessaires au contrôle de la théorie, observations qui jusqu'ici n'ont été faites ni en nombre suffisant, ni de la manière la plus approp.iée au but" (Première moitié, p. 231).

En relisant ce passage, l'idée m'est venue d'essayer de fournir, en ce qui concerne la diffusion, quelques-unes des données que M. Lothar Meyer réclame comme pierre de touche de la théorie. Je m'y suis décidé d'autant plus volontiers, que les excellents régulateurs de température, construits dans ces derniers temps, rendent facile de maintenir constant, pendant une durée indéfinie, un degré quelconque de chaleur.

L'appareil que j'ai employé pour l'exécution des expériences est représenté dans la figure ci-jointe. Un tambour en tôle de



fer *A* est rempli d'environ 7 litres d'eau. Au fond de ce tambour repose, sur un pont en gaze de cuivre *F*, un verre cylindrique *B* à bouchon de verre rodé, qui possède une hauteur de 21 centim. et un diamètre de 8,5 cm. et qui est entièrement immergé dans l'eau. A côté du verre cylindrique, dans le liquide qui l'entoure, se trouve un régulateur de température d'Andreae, *D*. La flamme de gaz étant placée sous le tambour, au moyen du régulateur on amène le liquide à un degré de chaleur déterminé et fixe. Une flamme menue, brûlant à l'extrémité d'une fine pointe *G*, est destinée à empêcher que la grande flamme ne s'éteigne complètement, ou, si cela arrive, à la rallumer lorsque le gaz afflue de nouveau en quantité suffisante. Deux

thermomètres K et L, dont l'un divisé en dixièmes de degré, font connaître la température de l'eau. L'appareil à osmose consiste en un petit flacon à col droit, de 150 cc. de capacité, dont le fond a été enlevé et dont le bord inférieur a ensuite été dressé avec soin. Une membrane tendue remplace le fond de verre. Le col du flacon est fermé par un bouchon de liège, à travers lequel passe un petit tube capillaire. Après avoir introduit dans le flacon 50 cc. d'une solution saline, on le suspend, à l'aide d'une petite plaque de cuivre, dans un verre à précipité M, qui n'est pas beaucoup plus large que lui et qui contient 100 cc. d'eau distillée. On retire ensuite le verre cylindrique B de l'eau chauffée du tambour et on y introduit le verre à précipité avec son contenu. Après avoir bien fermé le verre cylindrique, on le replace finalement dans le tambour et on note le temps. Les choses ainsi disposées, je laissais l'osmose s'opérer pendant 6 heures. Au bout de ce temps, l'expérience était interrompue et le contenu du verre à précipité était examiné. Cet examen consistait en un titrage avec une solution de nitrate d'argent à $^1/_{10}$ du titre normal, le chromate de potasse faisant fonction d'indicateur (provisoirement, je n'ai étudié que chez des chlorures l'intensité des courants osmotiques).

Quelques détails doivent encore être ajoutés au sujet de certaines parties de l'opération.

En premier lieu, le choix de la membrane a été l'objet de beaucoup de soins. A l'origine, j'employais le papier-parchemin, mais j'en fus peu satisfait. Il me parut éprouver des changements, qui exerçaient de l'influence sur l'intensité de l'osmose. Après de nombreux essais, mon choix se fixa sur la vessie de lapin ou de lièvre. Elle me fournit une membrane transparente, extrêmement fine, satisfaisant à toutes les conditions. Volontiers j'aurais expérimenté sans membrane, et éliminé ainsi l'un des facteurs en action. L'intensité de l'osmose, déterminée de la manière susdite, doit en effet dépendre et du pouvoir d'imbibition de la membrane et des attractions moléculaires des liquides. Dans les résultats obtenus, ces influences trouvent toutes deux

leur expression, et comme ni l'une ni l'autre n'est exactement connue en elle-même, il est généralement impossible de décider quelle part revient à chacune d'elles. Aucune des méthodes de diffusion sans membrane, que j'ai trouvées décrites, ne m'a toutefois paru se prêter à une détermination exacte de la quantité du sel diffusé, et tous mes efforts, pour découvrir et appliquer une méthode qui permît cette détermination, ont échoué devant des difficultés techniques. La séparation nette des liquides, nécessaire pour le titrage, ne peut être obtenue, à cause surtout des déplacements de la surface limite, produits par la pression hydrostatique. Même dans la méthode de Beilstein, le mélange des liquides ne saurait être entièrement évité. En outre, des forces étrangères à la diffusion proprement dite entrent en jeu dans cette méthode. Les molécules de l'eau diffusant plus rapidement que les molécules du sel, du liquide doit être refoulé du tube fermé à sa partie supérieure, dans le tambour. Quelques-unes des méthodes en question permettent, il est vrai, de mesurer les volumes des liquides avant et après la diffusion, ce à quoi j'ai dû renoncer; mais, par contre, ma manière d'opérer présente d'autres avantages, beaucoup plus grands, et d'ailleurs la mesure dont il s'agit n'était pas de première importance pour le but que je me proposais.

Par le choix d'une membrane convenable, j'ai cru pouvoir réduire à un minimum l'inconvénient ci-dessus signalé. Une bonne vessie de lièvre (préalablement débarrassée de toute trace de graisse et d'impuretés, au moyen de traitements prolongés par l'eau, l'alcool et l'éther) est si mince, si perméable aux liquides, que son influence sur les courants osmotiques peut être estimée très faible. Et celle-ci fût-elle plus grande qu'il n'y a lieu de le penser, il n'en resterait par moins très vraisemblable que, chez des sels analogues, elle ne diffère pas assez pour que la signification des résultats en soit notablement modifiée. Je pars donc de l'hypothèse que ces résultats expriment, par rapport à l'osmose, les propriétés spécifiques des sels, et non, ou seulement à un très faible degré, celles de la membrane.

Beaucoup d'attention devait aussi être apportée à la manœuvre du petit flacon H, lorsqu'il s'agissait de le retirer de l'appareil ou de l'y remettre. Des mesures spéciales étaient nécessaires pour empêcher que, durant cette opération, des gouttes du liquide ne fussent exprimées à travers la membrane. La mise en place du flacon se faisait de la manière suivante. Le verre à précipité recevait 100 cc. d'eau distillée et portée préalablement à la température de l'eau contenue dans le tambour. Dans le flacon on versait alors les 50 cc. de solution saline, pendant qu'un aide le laissait descendre de telle sorte dans l'eau du verre à précipité, que les surfaces des liquides, dans le verre et dans le flacon, restassent toujours au même niveau. La solution saline n'était pas chauffée préalablement, afin d'en prévenir l'expression à travers la membrane. A l'aide de marques faites au verre et au flacon, ce dernier était suspendu dans une position qui pouvait toujours être retrouvée exactement. Le verre cylindrique B, qui entretemps avait pris dans le tambour la température voulue, était alors amené au jour; on y introduisait le verre à précipité, après quoi on le replaçait dans le tambour, où il était fixé par une tringle.

Lorsqu'un intervalle de 6 heures était écoulé, on enlevait du tambour le verre cylindrique, dont on retirait le contenu. Un siphon était alors introduit dans le flacon, et celui-ci, à mesure que le liquide s'en écoulait, était soulevé dans le verre à précipité de façon que, maintenant aussi, la pression hydrostatique restât la même en dedans et en dehors. On nettoyait ensuite le flacon à l'extérieur au moyen d'un jet d'eau distillée, qui s'écoulait dans le verre à précipité; on en lavait l'intérieur, à différentes reprises, avec de petites quantités d'eau, enfin on le suspendait, pourvu d'un peu d'eau distillée, dans un autre verre à précipité, qui contenait également de l'eau pure. On le laissait ainsi pendant 24 heures, pour épuiser la membrane. Au bout de ce temps, les liquides contenus dans les deux verres à précipité et dans le flacon étaient réunis et amenés à un

volume de 200 cc. Dans 10 cc. de ce mélange on dosait le chlore, par voie de titrage, ainsi qu'il a été dit plus haut. Le régulateur de la température fonctionnait admirablement. A l'œil nu, il était à peine possible de constater une oscillation dans la colonne thermométrique.

Les sels, avant d'être employés aux solutions, étaient amenés avec soin à l'état de pureté chimique.

Tout l'appareil se trouvait dans une cave, à l'abri de la poussière et des courants d'air.

Quelques essais préliminaires, avec une même solution saline, fournirent la preuve que toutes les circonstances de l'expérience étaient parfaitement constantes. L'accord des résultats ne laissait rien à désirer.

§ 2. *La loi de la proportionnalité.* M. Wüllner, dans son *Lehrbuch der Experimentalphysik*, écrit: „Les expériences de Graham, de Fick et de Beilstein ont appris que la diffusion des molécules des sels dans l'eau est proportionnelle à la densité des solutions salines, lorsqu'on laisse celles-ci diffuser dans l'eau pure . . . . . ; en d'autres termes, la quantité de sel qui passe, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionnelle à la quantité de sel dissous" (tome I, p. 238, 2e éd.).

Dans un autre passage, on lit: . . . . „Mais à cela nous ne sommes pas autorisés, attendu surtout que M. Beilstein conclut de ses expériences que la loi de proportionnalité entre les quantités diffusées et les densités des solutions est seulement approximative; conclusion que M. Wildt, toutefois, ne regarde pas comme justifiée" (*Lehrb. d. Exp. Phys.*, t. I, p. 239).

Des doutes paraissent donc encore subsister à l'égard de la loi de la proportionnalité. Comme je ne connaissais pas de recherches postérieures, tranchant la question dans l'un ou dans l'autre sens, je résolus de faire, en premier lieu, quelques expériences à ce sujet.

Tableau I.

Composition de la solution saline contenue dans le flacon ; exprimée en grammes.	Température dans le tambour.	Durée de l'osmose, en heures.	Quantité de chlore qui a traversé la membrane ; expr. en grammes.	Quantité de chlore qui doit traverser la membrane suivant le calcul ; expr. en grammes.	Différence entre les résultats de l'expérience et du calcul.	Espèce de la membrane employée.
1. Chlorure de potassium.. 5,846	30°,5	6	1,6028	1,6028	0	Vessie de lapin.
2. Idem...... 2,923	30°,5	6	0,8014	0,8014	0	Vessie de lapin de l'expérience 1.
3. Idem...... 1,4615	30°,5	6	0,3971	—	—	Vessie de lapin de l'expérience 8.
4. Chlorure de sodium 2,923	30°,5	6	1,0212	1,0212	0	Vessie de lapin de l'expérience 1.
5. Idem...... 1,4615	30°,5	6	0,5106	0,5106	0	〃 〃
6. Chlorure d'ammonium....... 2,923	30°,5	6	1,1489	1,1489	0	〃 〃
7. Idem...... 1,4615	30°,5	6	0,5744	0,5744	0	〃 〃
8. Chlorure de sodium......... 1,4615	30°,5	6	0,4752	0,4752	0	Autre vessie de lapin.
9. Idem.. .. 0,7307	30°,5	6	0,2376	0,2376	0	Vessie de lapin de l'expérience 8.
10. Idem...... 0,3653	30°,5	6	0,1170	0,1188	0,0018	〃 〃
11. Idem...... 0,1826	30°,5	6	0,0589	0,0594	0,0005	〃 〃
12. Chlorure de magnésium........ 1,5068	30°,5	6	0,5975	0,5975	0	Vessie de lièvre.
13. Idem...... 0,7534	30°,5	6	0,2993	0,2987	0,0006	Vessie de lièvre de l'expérience 12.
14. Idem...... 0,3767	30°,5	6	0,1489	0,1493	0,0004	〃 〃
15. Chlorure de calcium.......... 1,3033	30°,5	6	0,4521	0,4521	0	〃 〃
16. Idem...... 0,6516	30°,5	6	0,2262	0,2260	0,0002	〃 〃
17. Idem...... 0,3258	30°,5	6	0,1120	0,1130	0,0010	〃 〃
18. Idem...... 1,3033	35°,5	6	0,4610	0,4610	0	〃 〃
19. Idem...... 0,6516	35°,5	6	0,2305	0,2305	0	〃 〃

Quelques remarques, ayant rapport au tableau I et en partie aussi aux tableaux suivants, doivent trouver place ici.

Les expériences n'ont pas été exécutées dans l'ordre où, pour plus de clarté, on les a rangées dans les tableaux. C'est pour cela que, dans les tableaux postérieurs, on retrouve çà et là pour la vitesse du courant osmotique d'un sel un chiffre déjà consigné dans un tableau précédent, ou une membrane déjà indiquée à propos d'expériences de numéros antérieurs.

Le volume de la solution saline, introduite dans le flacon, était toujours de 50 cc.

Les poids des sels, inscrits dans les tableaux, ont toujours rapport aux sels à l'état anhydre.

Par „quantité de chlore qui doit traverser la membrane suivant le calcul", il faut entendre, dans le tableau I, la quantité exigée par la loi de la proportionnalité.

Il ressort du tableau I, que le changement de membrane exerçait, au début, une influence assez sensible. On trouvera, à cet égard, des indications précises dans les éclaircissements du tableau II. Bientôt j'eus l'occasion d'apprendre à connaître, dans ses détails, l'influence de la membrane. Je remarquai qu'une membrane n'acquiert son maximum de pouvoir transmissif qu'après avoir servi quelque temps à des expériences d'osmose. Il m'a paru aussi que ce maximum n'était pas atteint, pour tous les sels, avec la même rapidité. La dessiccation de la membrane exerçait sur l'intensité des courants osmotiques une influence remarquable. Une membrane (vessie de lièvre) qui avait séché longtemps à la température ordinaire, fut employée à trois expériences consécutives, dans chacune desquelles le flacon recevait 1,4615 gr. de chlorure de sodium. Il passa successivement 0,4716, 0.4858 et 0,5071 gr. de chlore par la membrane, après quoi le courant osmotique était devenu constant.

La plus grande attention doit être apportée au degré de tension de la membrane.

Il importe beaucoup aussi de choisir pour les expériences des vessies d'animaux de la même espèce et du même âge.

Une fois au courant de ces particularités, je pus m'arranger de telle sorte que le remplacement de la membrane, par une autre de la même espèce, n'occasionnât presque aucune variation dans l'intensité du courant osmotique.

Je veillais aussi à ce que la membrane restât toujours à une distance constante du fond du verre à précipité dans lequel le flacon était suspendu.

Dès les premières expériences, j'eus soin d'examiner si, pour la même membrane, l'intensité relative et absolue du courant osmotique de chacun des sels subissait, à circonstances égales, quelque changement. A cet effet, l'intensité de l'osmose, pour chacun des sels, fut fréquemment déterminée de nouveau. Un changement, qui se produisait de loin en loin, était de cette manière immédiatement reconnu et pouvait être pris en considération.

Des résultats contenus dans le tableau I, je crois pouvoir tirer la conclusion que la loi de la proportionnalité n'est pas, comme le pense M. Beilstein, une approximation, mais l'expression exacte des faits. *Les quantités des sels qui, dans le même temps et dans les mêmes circonstances, passent à travers la même membrane dans l'eau pure, sont donc proportionnelles à la concentration des solutions salines.*

Il est vrai que les expériences ci-dessus relatées n'ont rapport qu'à cinq sels et à un nombre restreint de dilutions; néanmoins, on peut regarder comme très probable que la loi ne tient pas à des particularités de ces sels et à ces degrés déterminés de concentration, qu'elle est générale. L'opinion a bien été exprimée que l'acide chlorhydrique, à un certain degré de concentration, présente un point de rebroussement à l'égard de l'osmose; mais cette anomalie s'explique peut-être par quelque circonstance accessoire. D'ailleurs, chez les sels, de semblables points de rebroussement n'ont, que je sache, jamais été rencontrés. L'anomalie en question ne constitue donc pas une exception à la loi de la proportionnalité, telle qu'elle est formulée plus haut.

Néanmoins, il conviendra d'examiner ce point d'une manière spéciale, et, en général, de multiplier les expériences et de faire entrer un plus grand nombre de sels dans le cercle des recherches.

§ 3. *Influence qu'exercent l'un sur l'autre des sels qui, de la même solution, passent simultanément, à travers une membrane, dans l'eau pure.*

(Voir tableau II, p. 242 et 243).

La disposition du tableau II demande encore quelques éclaircissements.

Sous la désignation: „Quantité de chlore qui doit traverser la membrane suivant le calcul", on entend ici la quantité de chlore qui doit passer par la membrane si les sels, dans la solution commune, conservent leur vitesse de courant osmotique, c'est-à-dire, cheminent indépendamment les uns des autres à travers la membrane.

Durant ces expériences, on a de nouveau déterminé fréquemment l'intensité de l'osmose de chacun des sels pris à part. Il a été trouvé ainsi que la nouvelle vessie de lapin (introduite dans l'expérience 8 du tableau I) était, pour le chlorure de potassium et surtout pour les chlorures d'ammonium et de sodium, moins perméable que la vessie précédente. Pour le chlorure d'ammonium, le pouvoir transmissif augmenta ensuite un peu, comme le montre la détermination de l'expérience 23.

Il résulte des tableaux I et II que 1,4615 gr. de chlorure de sodium, de chlorure de potassium et de chlorure d'ammonium ont laissé passer, à 30°,5, par la *vessie de lapin de l'expérience* 1, respectivement 0,5106 gr., 0,4007 gr. et 0,5744 gr. de chlore. (Le chiffre 0,4007, pour le chlorure de potasium, n'a pas été obtenu expérimentalement, mais a été déduit du résultat de l'expérience 2 du tableau I). Avec la *vessie de lapin de l'expérience* 8, à 30°,5, cette quantité de chlore, pour 1,4615 gr. de chlorure de sodium et de chlorure de potassium, a été respec-



Tableau II.

Composition de la solution saline contenue dans le flacon; exprimée en grammes.	Température dans le tambour.	Durée de l'osmose, en heures.	Quantité de chlore qui a traversé la membrane; expr. en grammes.	Quantité de chlore qui doit traverser la membrane suivant le calcul; expr. en grammes.	Différence entre les résultats de l'expérience et du calcul.	Quantité de chlore que chacun des sels mélangés pris à part laisse passer à travers la membrane; exprimée en grammes.	Espèce de la membrane employée.
20 Chlorure de sodium..1,4615 Chlor. de potassium. .1,4615	30°,5	6	0,9113	0,9113	0	Chorure de sodium . . .0,5106 Chlor. de potassium. .0,4007	Vessie de lapin de l'expérience 1.
21 Chlor. de potassium. .1,4615 Chlor. d'ammonium..1,4615	30°,5	6	0,9787	0,9751	0,0036	Chlor. de potassium. .0,4007 Chlor. d'ammonium. .0,5744	" "
22 Chlor. de potassium. .1,4615 Chlor. d'ammonium..1,4615	30°,5	6	0,9290	0,9290	0	Chlor. de potassium. .0,3971 Chlor. d'ammonium. .0,5319	Vessie de lapin de l'expérience 8.
23 Chlor. de sodium.....1,4615 Chlor. d'ammonium..1,4615	30°,4	6	1,0159	1,0177	0,0018	Chlor. de sodium.....0,4752 Chlor. d'ammonium. .0,5425	" "
24 Chlor. de potassium. .1,4615 Chlor. de sodium.....1,4615 Chlor. d'ammonium. .1,4615	30°,5	6	1,4148	1,4148	0	Chlor. de potassium. .0,3971 Chlor. de sodium.....0,4752 Chlor. d'ammonium. .0,5425	" "
25 Chlor. de sodium.....1,4615 Chlor. de potassium. .1,4615	35°,5	6	0,9149	0,9113	0,0036	Chlor. de sodium.....0,5106 Chlor. de potassium. .0,4007	Vessie de lièvre de l'expérience 12.
26 Chlor. de sodium.....0,2923 Chlor. de potassium. .0.2923	35°,5	6	0,1808	0,1822	0,0014	Chlor. de sodium.....0,1021 Chlor. de potassium. .0,0801	" "
27 Chlor. de sodium.....0,7307 Chlor. de potassium. .0,7307	35°,5	6	0,4539	0,4556	0,0017	Chlor. de sodium.....0,2553 Chlor. de potassium. .0,2003	" "
28 Chlor. de sodium.....0,7307	35°,5	6	0,5390	0,5372	0,0018	Chlor. de sodium.....0,2553	
29 Chlor. de sodium.....1,4615 Chlor. d'ammonium. .1,4615	35°,5	6	1,0762	1,0744	0,0018	Chlor. de sodium.....0,5106 Chlor. d'ammonium. .0,5638	" "
30 Chlor. de sodium.....0,7307 Chlor. de potassium. .0,7307 Chlor. d'ammonium..0,7307	35°,5	6	0,7321	0,7375	0,0054	Chlor. de sodium.....0,2553 Chlor. de potassium. .0,2003 Chlor. d'ammonium. .0,2819	" "
31 Chlor. de sodium.....0,2923 Chlor. de potassium. .0,2923 Chlor. d'ammonium..0,2923	35°,5	6	0,2978	0,2949	0,0029	Chlor. de sodium.....0,1021 Chlor. de potassium. .0,0801 Chlor. d'ammonium. .0,1127	" "
32 Chlor. de potassium. .0,7307 Chlor d'ammonium. .0,7307	35°,5	6	0,4872	0,4822	0,0050	Chlor. de potassium. .0,2003 Chlor. d'ammonium. .0,2819	" "
33 Chlor. de sodium.....0,7307 Chlor. de calcium....0,7238	35°,5	6	0,5149	0,5113	0,0036	Chlor. de sodium.....0,2553 Chlor. de calcium....0,2560	" "
34 Chlor. de potassium. .0,9528 Chlor. de calcium....0,7238	35°,5	6	0,5177	0,5172	0,0005	Chlor. de potassium. .0,2612 Chlor. de calcium....0,2560	" "
35 Chlor. d'ammonium. .0,7307 Chlor. de calcium....0,7238	35°,5	6	0,5354	0,5379	0,0025	Chlor. d'ammonium. .0,2819 Chlor. de calcium....0,2560	" "
36 Chlor. d'ammonium. .0,7307 Chlor. de magnésium.0,7534	35°,5	6	0,5833	0,5868	0,0035	Chlor. d'ammonium. .0,2810 Chlor. de magnésium.0,3058	" "
37 Chlor. de calcium....0,6516 Chlor. de magnésium.0,7534	35°,5	6	0,5319	0,5363	0,0044	Chlor. de calcium....0,2305 Chlor. de magnésium.0,3058	" "
38 Chlor. d'ammonium. .0,5345 Chlor. de magnésium.0,9454	30°,5	6	0,5742	0,5772	0,0030	Chlor. d'ammonium. .0,2023 Chlor. de magnésium.0,3749	" "
39 Chlor. de potassium. .0,7445 Chlor. de magnésium.0,9454	30°,5	6	0,5798	0,5808	0,0010	Chlor. de potassium. .0,2059 Chlor. de magnésium.0,3749	" "
40 Chlor. de potassium. .1,0253 Chlor. de magnésium.0,6509	30°,5	6	0,5337	0,5417	0,0080	Chlor. de potassium. .0,2836 Chlor. de magnésium.0,2581	" "
41 Chlor. de potassium. .1,0253 Chlor. de magnésium.0,6509	30°,5	6	0,5326	0,5417	0,0091	Chlor. de potassium. .0,2836 Chlor. de magnésium.0,2581	" "

tivement de 0,4752 gr. et 0,3971 gr.; quant au chlorure d'ammonium, pour 1,4615 gr. de ce sel, il a été transmis, par la même membrane, initialement 0,5319 gr. de chlore (durant l'expérience 22) et plus tard 0,5425 gr. (durant les expériences 23 et 24).

La *vessie de lièvre introduite dans l'expérience* 12, mise en présence de 1,4615 gr. de chlorure de sodium, de potassium et d'ammonium, à 35°,5, laissa passer respectivement 0,5106 gr., 0,4007 gr. et 0,5638 gr. de chlore. L'osmose de ces sels se maintint ensuite au même degré d'intensité. Une détermination, toutefois, faite après l'exécution de l'expérience 36, montra un léger changement dans la vitesse du courant osmotique. De 1,4615 gr. de chlorure de sodium, de potassium et d'ammonium, il passa alors, par la même membrane, à la même température de 35°,5, respectivement 0,5142 gr., 0,4042 gr. et 0,5620 gr. de chlore.

Pour les expériences postérieures on employa toujours la même vessie de lièvre. Dans la vitesse du courant osmotique aucune nouvelle variation ne fut observée, de sorte qu'à cet égard les chiffres des tableaux n'ont plus besoin de commentaires.

La question est maintenant de savoir quelle signification doit être attachée aux résultats expérimentaux contenus dans le tableau II. Si l'on néglige provisoirement les numeros 39, 40 et 41 de ce tableau, un remarquable accord frappe à première vue. Sans doute, ces résultats comportent encore plus d'une interprétation. Il se pourrait que la vitesse osmotique de un ou plusieurs des sels diminuât dans le même rapport où augmenterait celle des autres. Dans quelques-uns des mélanges, par exemple dans ceux du chlorure de magnésium et du chlorure de calcium avec les chlorures des métaux alcalins, il pourrait se former des sels doubles ayant une vitesse osmotique conforme au résultat obtenu. La première supposition est inadmissible, vu que rien ne porte à croire que les sels exerceraient les uns sur les autres une influence si remarquable. La seconde supposition peut être rejetée pour les chlorures de potassium, de

sodium et d'ammonium. Entre ces sels, il existe tout au plus une faible attraction moléculaire. Malgré les grandes différences du degré de dilution, la vitesse du courant osmotique du mélange resta toujours égale à la somme des vitesses propres aux sels mélangés. En ce qui concerne ces trois chlorures, on est donc en droit d'émettre l'hypothèse: *que chacun de ces sels conserve, dans la solution commune, sa vitesse osmotique propre;* en d'autres termes, *qu'ils passent indépendamment les uns des autres de la solution commune, à travers la membrane, dans l'eau pure.* Pour acquérir encore plus de certitude au sujet de cette hypothèse, il conviendrait de soumettre à l'osmose des mélanges des trois mêmes sels pris dans les proportions les plus variées.

Les résultats des expériences faites avec des mélanges de chlorure de calcium, de chlorure d'ammonium et des chlorures des métaux alcalins conduiraient à étendre l'hypothèse à ces sels. Pour eux aussi, les petits écarts existants peuvent être estimés compris dans les limites des erreurs d'observation. Toutefois, nos expériences sur ces sels ne sont encore nullement suffisantes, ni quant au nombre ni quant à la diversité, pour légitimer une pareille conclusion. C'est ce qui ressortira plus clairement des détails suivants.

Les chlorures de magnésium, d'ammonium et de potassium furent d'abord mêlés en un nombre égal de molécules. Dans l'expérience 38, on ajouta $0,9454 = 94,92 \times 0,00996$ grammes de chlorure de magnésium à $0,5345 = 53,58 \times 0,00997$ gr. de chlorure d'ammonium, et dans l'expérience 39, $0,9454 = 94,92 \times 0,00996$ gr. de chlorure de magnésium à $0,7445 = 74,57 \times 0,00998$ gr. de chlorure de potassium. Les résultats sont encore dans un accord satisfaisant avec l'hypothèse énoncée, de même que ceux de l'expérience 36, dans laquelle, en proportion du chlorure d'ammonium, on a pris une plus grande quantité de chlorure de magnésium.

Mais dans l'expérience 40, où $0,6509 = 94,92 \times 0,00685$ gr. de chlorure de magnésium furent mêlés à $1,0263 = 74,75 \times 2 \times 0,00685$ gr. de chlorure de potassium, les écarts sont trop

grands pour qu'on puisse les imputer aux erreurs d'observation. Pour 1 molécule de chlorure de magnésium, il y avait ici 2 molécules de chlorure de potassium. Je répétai cette expérience, mais le résultat, comme le tableau l'indique, resta à peu près le même. Il est remarquable que l'écart devienne si grand justement dans ce cas-ci, où il s'agit d'un sel de magnésium et d'un sel alcalin, lesquels, comme on sait, forment ensemble des sels doubles bien cristallisés. Dans ce cas, il entre donc certainement en jeu des forces moléculaires.

Admettons que dans les expériences 39 et 40 les deux chlorures se sont unis dans les proportions du mélange qu'on en avait fait. Dans l'expérience 39, il s'est alors formé, au sein du liquide, le sel double $Mg\,Cl_2.\,K\,Cl$. Du résultat de cette expérience, consigné dans le tableau II, on peut déduire que 1,6899 gr. de ce sel laissent passer par la membrane une quantité de chlorure telle, que sa décomposition exige 163,5 cc. de la solution argentique ($\frac{1}{10}$ normale).

Dans l'expérience 40, c'est le sel double $Mg\,Cl_2.\,2\,K\,Cl$ qui aura pris naissance, et du résultat de cette expérience il suit que, pour la décomposition du chlorure que 1,6899 gr. de ce sel envoient à travers la membrane, il faut 151,7 cc. de la solution argentique (voir le tableau III).

Si l'on compare maintenant les poids moléculaires de ces sels avec les nombres relatifs de molécules qu'ils laissent passer par la membrane à 30°5, toutes circonstances égales, on obtient les résultats suivants :

(Voir tableau III, p. 247).

L'écart des résultats des expériences 39 et 40 serait donc expliqué, si l'on admet qu'il se forme des sels doubles de la composition $Mg\,Cl_2.\,K\,Cl$ et $Mg\,Cl_2.\,2\,K\,Cl$, dont les molécules posséderaient des vitesses osmotiques moléculaires (voir p. 250) inversement proportionnelles aux poids moléculaires.

Si l'on calcule de la même manière le nombre relatif des molécules que 1,6899 gr. de chlorure de magnésium laissent

Tableau III.

Composition de la solution saline contenue dans le flacon; exprimée en grammes.	Température dans le tambour.	Durée de l'osmose, en heures.	Quantité de chlore qui a traversé la membrane; exprimée en grammes.	c. c. de solution argentique nécessaires pour la décomposition du sel qui a traversé la membrane.	Nombre relatif des molécules de sel qui ont traversé la membrane.	Poids moléculaire des sels.	Produit du poids moléculaire par le nombre relatif des molécules de sel qui ont traversé la membrane.	Espèce de la membrane employée.
42. Sel double de la composition *Mg Cl*$_2$. *K Cl*. 1,6899 gr.	30°,5	6	0,5798	163,5	54,5	169,49	9237,2	Vessie de lièvre de l'expérience 12.
43. Sel double de la composition *Mg Cl*$_2$. 2 *K Cl*. 1,6899 gr.	30°,5	6	0,5380	151,7	37,9	244,06	9249,9	Id.

passer, dans les mêmes circonstances, à travers la membrane, on trouve que les sels désignés dans les expériences 42 et 43 possèdent, comparés au chlorure de magnésium, des vitesses osmotiques un peu plus grandes qu'il ne le faudrait si ces vitesses sont en raison inverse des poids moléculaires. Nous aurons toutefois encore l'occasion, plus loin, de faire remarquer que la vitesse du courant osmotique n'est pas déterminée par le poids moléculaire seul, quoique l'influence de celui-ci soit pourtant prédominante pour des sels analogues.

Des actions moléculaires du même genre auraient aussi pu avoir lieu dans les mélanges de chlorure de calcium et de sodium, de chlorure de calcium et de potassium, de chlorure de calcium et d'ammonium, de chlorure de magnésium et d'ammonium, de chlorure de magnésium et de calcium. Les résultats des expériences faites sur ces mélanges sont inscrits sous les numéros 33 à 40 du tableau II. Pour beaucoup de ces chlorures, l'existence de sels doubles a été constatée. Dans les solutions, il a donc pu se former des molécules complexes, laissant ou non subsister en dehors d'elles une partie des molécules simples. La circonstance que les résultats de ces expériences ne montrent aucun désaccord avec l'hypothèse énoncée p. 245 peut provenir de ce que les molécules complexes laissent passer à travers la membrane tout juste autant de chlore que l'eussent fait les molécules constituantes, si celles-ci étaient restées séparées, chacune avec sa vitesse osmotique propre.

Des recherches ultérieures devront apprendre chez quels mélanges de sels et dans quelle mesure la vitesse du courant osmotique éprouve l'influence de la formation de groupes de molécules. Le travail à faire consistera, en premier lieu, à expérimenter sur un grand nombre de mélanges des mêmes sels, pris en proportions différentes. Si, dans tous ces cas, la membrane laisse passer autant de chlore que l'exige l'hypothèse de l'indépendance des sels, il deviendra très probable que cette indépendance existe réellement. Dans la supposition, en effet, que les mélanges en proportions différentes donnent toujours

naissance aux mêmes groupes de molécules, le nombre des molécules simples qui restent doit être chaque fois différent. Or, il est inadmissible que les molécules composées posséderont toujours une vitesse osmotique telle, que la quantité de chlore, transmise par elles et par les molécules simples, soit constamment égale à ce que demande l'hypothèse susdite. Les mélanges en proportions différentes déterminent-ils, au contraire, la formation de groupes moléculaires différents, il serait également très improbable que la vitesse osmotique de ces groupes eût toujours la valeur nécessaire pour que le chlore diffusé à travers la membrane s'accorde avec l'hypothèse.

De cette manière, l'osmose fournira aussi un critérium pour reconnaître si les sels forment entre eux, oui ou non, des sels doubles.

Après avoir exécuté le travail dont il vient d'être question, on pourra en contrôler les résultats en soumettant à l'expérience des solutions salines de concentration très variée et de températures différentes. Il est à présumer, en effet, que des groupes complexes de molécules, sous l'influence de fortes dilutions et de hautes températures, se résoudront en groupes de composition plus simple.

On devra s'attacher surtout à doser, dans le produit de l'osmose, les éléments électro-positifs des sels. Si la détermination de la quantité totale de chlore, qui traverse la membrane, peut conduire à formuler une hypothèse probable, celle des constituants électro-positifs permettrait des conclusions certaines.

Les méthodes qui viennent d'être indiquées ont déjà servi en partie, ainsi qu'il résulte du tableau II, à contrôler notre hypothèse. Mais ce travail doit être continué sur une beaucoup plus grande échelle avant que l'hypothèse, dans son énoncé général, puisse acquérir un haut degré de probabilité. J'espère pouvoir publier bientôt les résultats d'expériences très multipliées que j'ai entreprises dans cette direction.

§ 4. *Grandeur absolue de la vitesse du courant osmotique des sels.* M. Lothar Meyer, dans l'ouvrage déjà cité, dit: „Il est

clair que, dans les mouvements qui s'opèrent sans cesse à l'intérieur des liquides, une molécule changera d'autant plus rapidement de place, pénétrera d'autant plus facilement entre les autres, que sa vitesse propre sera plus grande et son volume plus petit. Or le volume moléculaire est en raison directe du poids moléculaire et en raison inverse de la densité. Quant à la vitesse, elle décroîtra, en général, lorsque le poids moléculaire augmente, de même que cela est le cas chez les gaz; l'expression exacte de la loi de cette dépendance n'est, toutefois, pas encore trouvée (*Die modernen Theorien der Chemie*, Prem. moitié, p. 231)".

(Voir tableau IV, p. 251).

Voyons si les résultats expérimentaux, contenus dans ce tableau, confirment les idées de M. Lothar Meyer, ci-dessus rappelées.

Entre les quantités des différents sels qui dans les mêmes circonstances passent par la membrane, et les poids moléculaires respectifs, n'existe évidemment pas la relation dont parle M. Lothar Meyer. Du nombre de c.c. de solution argentique nécessaires pour la décomposition du sel qui a traversé la membrane, on peut toutefois déduire — ainsi que cela été fait dans le tableau III — le nombre relatif des molécules de sel qui sont transmises dans des circonstances égales. Prenons ces nombres pour mesure de ce qu'on pourrait appeler la vitesse osmotique moléculaire. Or, si l'on considère que les quantités de sel, qui dans les mêmes circonstances passent par la membrane (quantités données dans le tableau), sont les produits de nombres proportionnels aux poids moléculaires des sels par les susdits nombres relatifs des molécules transmises, on est conduit à penser que les vitesses osmotiques moléculaires pourraient être en raison inverse des poids moléculaires des sels. Les produits en question ne diffèrent, effectivement, pas beaucoup entre eux; néanmoins, ils sont loin d'être parfaitement égaux, comme cela devrait être le cas si les vitesses osmotiques moléculaires ne

Tableau IV.

Composition de la solution saline contenue dans le flacon; exprimée en grammes.	Température dans le tambour.	Durée de l'osmose; en heures.	c.c. de solution argentique nécessaires pour la décomposition du sel qui a traversé la membrane.	c.c. de solution argentique qui seraient nécessaires pour la décomposition du sel passé par la membrane, si le flacon, dans chaque expérience, avait contenu 1,4615 gr. de sel.	Nombre relatif des molécules qui traversent la membrane lorsque le flacon contient 1,4615 gr. de sel.	Quantité de sel, exprimée en grammes, qui traverse la membrane lorsque le flacon contient 1,4615 gr. de sel.	Poids moléculaires des sels.	Espèce de la membrane employée.
44. Chlorure de sodium..1,4615	30°,5	6	141	141	141	0,8243	58,46	Vessie de lièvre de l'expérience 12.
45. Chlor. de potassium .1,4615	30°,5	6	114	114	114	0,8501	74,57	" "
46. Chlor. d'ammonium.1,4615	30°,5	6	156	156	156	0,8340	53,46	" "
47. Chlor. de calcium ...1,3033	30°,5	6	127,5	142,9	71,45	0,7925	110,92	" "
48. Chlor. de magnésium 1,5068	30°,5	6	168,5	163,4	81,7	0,7755	94,92	" "
49. Chlor. de strontium .2,04	30°,5	6	142	101,7	50,85	0,8056	158,42	" "
50. Chlor. de barium... 2,1571	30°,5	6	114	77,2	38,6	0,8026	207,92	" "
51. Chlor. de sodium....1,4615	35°,5	6	145	145	145	0,8477	58,46	" "
52. Chlor. de potassium .1,4615	35°,5	6	114	114	114	0,8501	74,57	" "
53. Chlor. d'ammonium.1,4615	35°,5	6	158,5	158,5	158,5	0,8473	53,46	" "
54. Chlor. de calcium ...1,3033	35°,5	6	130	145,8	72,9	0,8086	110,92	" "
55. Chlor. de magnésium 1,5068	35°,5	6	172,5	167,3	83,65	0,7940	94,92	" "
56. Chlor. de strontium .2,04	35°,5	6	146	104,6	52,3	0,8285	158,42	" "
57. Chlor. de barium....2,1571	35°,5	6	116	78,6	39,3	0,8171	207,92	" "

Pour les poids atomiques des éléments, on a pris les nombres suivants:

Sodium...........	23	Magnésium........	24	Azote.............	14
Potassium.	39,11	Strontium.........	87,5	Chlore	35,46
Calcium...........	40	Barium	137	Hydrogène	1

dépendaient, de la manière présumée, que des poids moléculaires. En distribuant les sels en groupes, d'après le nombre d'atomes de chlore que leur molécule contient, on reconnaît que, dans les limites de ces groupes, les écarts à la loi ne sont pas très grands. Cela éveille l'idée qu'il y a encore d'autres forces en jeu. Celles-ci, naturellement, se manifesteraient avec le plus d'uniformité chez les sels ayant une composition semblable. Au nombre de ces forces, on devrait ranger l'influence de la chaleur et celle de la forme des molécules. La membrane pourrait aussi exercer, en ce qui concerne l'osmose, une action différente, quoique faible, pour des sels différents. A priori, il n'est pas improbable non plus que, sous des conditions déterminées, des agrégats de molécules de sel et d'eau existent dans les solutions. L'expérience devra décider dans quelles conditions il faut opérer pour avoir affaire à la vraie grandeur moléculaire.

J'ai déjà fait quelques tentatives pour alourdir les molécules de sel par l'adjonction d'autres molécules, et pour déterminer le changement qui en résulte dans la vitesse osmotique moléculaire. Ces expériences, toutefois, sont encore trop peu nombreuses pour autoriser des conclusions.

Lorsque les influences accessoires seront suffisamment connues, de manière qu'on puisse en tenir compte, la loi du phénomène se dégagera peut-être nettement. Peut-être sera-t-il alors démontré *que les vitesses osmotiques moléculaires de sels*, *qui de leurs solutions passent dans l'eau pure*, *sont en raison inverse des poids moléculaires.*

Les vitesses osmotiques moléculaires des sels dépendent donc, selon toute apparence, non seulement des poids moléculaires, mais encore d'une quantité d'autres facteurs, dont quelques-uns ont été indiqués ci-dessus. La formule exprimant la relation entre la vitesse en question et tous ces facteurs devra être assez compliquée. Le poids moléculaire y sera toutefois, d'après ce qui précède, le facteur le plus influent.

§ 5. *Application des hypothèses et des lois ci-dessus énoncées*

à la recherche de la constitution des dissolutions. La loi de la proportionnalité et l'hypothèse de l'indépendance des sels, dans le phénomène de l'osmose, peuvent nous éclairer au sujet de certains changements chimiques qui s'accomplissent dans les liquides. J'ai commencé une série d'expériences dans cette direction, en opérant à la température de 30°,5, parce que c'est à cette température que l'intensité du courant osmotique des sels m'a présenté les plus grandes différences.

Le tableau ci-dessous contient les résultats obtenus. Les vitesses osmotiques des divers sels avaient conservé les valeurs indiquées dans le tableau II.

(Voir tableau V, p. 254).

Le chiffre 0,2814 (dernière colonne du tableau V, expérience 58) a été trouvé en admettant que tout le nitrate de potassium avait été transformé en nitrate d'ammonium; il restait alors 0,3438 gr. de chlorure d'ammonium dans la solution, tandis qu'il s'était formé 0,5397 gr. de chlorure de potassium. Cette expérience ne fournit pas les données nécessaires pour trancher la question, pour décider si tout le chlorure d'ammonium a persisté comme tel, ou s'il a été changé partiellement en chlorure de potassium. Les deux sels, en effet, lorsque leurs solutions contiennent le même nombre de molécules, laissent passer par la membrane, dans le même temps, des quantités de chlore à peu près égales. Le résultat prouve, toutefois, que le nitrate n'a pas exercé d'influence sur la vitesse osmotique du chlorure. La conclusion tirée des résultats des expériences suivantes s'en trouve fortifiée.

Dans l'expérience 59, il y a eu évidemment une action chimique représentée par l'équation :

$$Na\,Cl + K\,N\,O_3 = K\,Cl + Na\,N\,O_3.$$

Dans l'expérience 60, la transformation a été la suivante:

$$Ca\,Cl_2 + 2\,K\,N\,O_3 = 2\,K\,Cl + Ca\,(N\,O_3)_2.$$

Le nitrate de potassium, dans ces deux expériences, avait

Tableau V.

	Composition de la solution saline contenue dans le flacon; exprimée en grammes.	Température dans le tambour.	Durée de l'osmose; en heures.	Quantité de chlore qui a traversé la membrane; exprimée en grammes.	Quantité de chlore qui doit traverser la membrane si les sels originels subsistent dans la solution; exprimée en grammes.	Quantité de chlore qui doit traverser la membrane s'il se forme du chlor. de potassium et les nitrates respectifs; exprimée en grammes.	Espèce de la membrane employée.
58	Chlorure d'ammonium . . . 0,7307 Nitrate de potassium 0,7318	35°,5	6	0,2837	0,2810	0,2814	Vessie de lièvre de l'expérience 12.
59	Chlorure de sodium . . . . . 0,7307 Nitrate de potassium 1,264	30°,5	6	0,2588	0,2500	0,2577	〃 〃
60	Chlorure de calcium. . . . . 0,6516 Nitrate de potassium 1,188	30°,5	6	0,2411	0,2260	0,2422	〃 〃
61	Chlorure de calcium. . . . . 0,6516 Nitrate de potassium 0,731	30°,5	6	0,2376	0,2260	0,2360	〃 〃
62	Chlorure de magnésium. . 1,3018 Nitrate de potassium 2,77	30°,5	6	0,5461	0,5163	0,5657	〃 〃
63	Chlorure de magnésium. . 0,6509 Nitrate de potassium 1,385	30°,5	6	0,2748	0,2581	0,2828	〃 〃
64	Chlorure de magnésium. . 0,6509 Nitrate de potassium 1,385	30°,5	6	0,2730	0,2581	0,2828	〃 〃
65	Chlorure de magnésium. . 0,6509 Nitrate de potassium 2,923	30°,5	6	0,2819	0,2581	0,2828	〃 〃
66	Chlorure de magnésium. . 0,6509 Nitrate de potassium 2,923	30°,5	6	0,2798	0,2581	0,2828	〃 〃
67	Chlorure de magnésium. . 0,6509 Nitrate de potassium 2,923	30°,5	6	0,2801	0,2581	0,2828	〃 〃

été ajouté en quantité précisément suffisante pour décomposer tout le chlorure.

La quantité de nitrate de potassium mêlée au chlorure de calcium dans l'expérience 61 suffisait seulement à décomposer 0,4009 gr. de ce dernier sel et à former 0,5390 gr. de chlorure de potassium; il devait rester alors 0,2537 gr. de chlorure de calcium, subsistant comme tel. En admettant que la transformation ait effectivement lieu de cette manière dans la solution, on trouve par le calcul, pour la quantité de chlore qui doit passer par la membrane, le chiffre 0,2360, qui figure dans le tableau. Les vitesses osmotiques connues des sels isolés et l'hypothèse qu'ils passent indépendamment l'un de l'autre à travers la membrane sont, ici encore, les bases du calcul.

Particulièrement remarquables sont les résultats des expériences faites avec le chlorure de magnésium et le nitrate de potassium. Dans l'expérience 62, de même que dans les deux suivantes (63 et 64), on avait ajouté autant de nitrate qu'il en fallait pour la transformation complète du chlorure de magnésium. Comme la vitesse osmotique du chlorure de magnésium est moindre que celle du chlorure de potassium, les chiffres du tableau indiquent que le premier de ces sels n'a été décomposé qu'en partie. Ce résultat singulier exigeait toutefois une confirmation ultérieure. La concentration de la solution fut donc, en premier lieu, réduite de moitié; à cela près, tous les rapports, dans l'expérience 63, restèrent les mêmes. Le résultat est parfaitement conforme à celui de l'expérience 62: comme dans celle-ci, une partie seulement du chlorure a été décomposée. La même expérience fut répétée, sans amener de changement dans le résultat. Ensuite, dans trois expériences successives, on soumit à l'osmose un mélange de chlorure de magnésium (0,6509 gr.) avec un *excès* de nitrate de potassium (2,923 gr.). Cette fois, les résultats le montrent, tout le chlorure de magnésium fut transformé en chlorure de potassium, suivant l'équation:

$$Mg\,Cl_2 + 2\,K\,N\,O_3 = 2\,K\,Cl + Mg\,(N\,O_3)_2\,;$$

les différences entre les résultats peuvent être regardées comme tombant dans les limites des erreurs d'observation.

Il est digne de remarque que le chlorure de magnésium et les sels de potassium présentent ici, de même que dans les expériences dont le tableau II contient les résultats, une déviation à la règle. Si précédemment nous avons dû supposer la formation d'un sel double $n\,Mg\,Cl_2 . m\,K\,Cl$, les faits actuels plaident également en faveur de cette hypothèse. Il n'est pas improbable, en effet, qu'un pareil sel double sera décomposé moins facilement que chacun des sels constituants, pris séparément. Quelque chose d'analogue se rencontre chez la solution de chlorure de magnésium additionnée de sel ammoniac, dans laquelle la formation d'un sel double empêche même complètement la précipitation du magnésium par les carbonates alcalins.

Les résultats qui viennent d'être mentionnés prouvent que les hypothèses et les lois ci-dessus discutées font de l'osmose un excellent moyen de pénétrer dans la constitution des solutions. Pour une pareille étude, il faudra toujours avoir recours aux propriétés physiques des solutions. On n'a pas, en effet, le droit de conclure que les sels qui se déposent à l'état solide, d'une solution qu'on évapore, préexistaient comme tels dans le liquide. L'évaporation et la cristallisation ne peuvent jamais nous apprendre, non plus, si le chlorure de sodium et le nitrate de potassium, ou le chlorure de calcium et le nitrate de potassium, se transforment respectivement en chlorure de potassium et nitrate de sodium, ou en chlorure de potassium et nitrate de calcium. L'osmose montre que ces transformations ont effectivement lieu dans la solution même.

L'influence que la masse exerce dans les actions chimiques est mise en évidence, d'une façon caractérisque, par l'osmose, dans les expériences sur le chlorure de magnésium et le nitrate de potassium.

Je n'ai expérimenté qu'avec des chlorures. La méthode se laisse toutefois appliquer aussi à d'autres sels. Elle pourra probablement jeter beaucoup de jour sur les remarquables phénomènes de dissociation dans les solutions, sur la fixation de molécules d'eau par les sels dans le liquide, et sur d'autres questions analogues, que la voie purement chimique ne permet pas de résoudre, ou qu'elle résout incomplètement.

APPENDICE.

Au § 3 j'ai communiqué les résultats d'expériences ayant pour objet de rechercher l'influence que différents sels, contenus dans une même solution et traversant simultanément la membrane, exercent réciproquement sur la vitesse de leur courant osmotique. Ces expériences n'avaient porté que sur des sels très analogues par leurs propriétés et leur constitution. Plus tard je les ai étendues à deux corps de fonction chimique différente, à savoir, le sel marin et l'acide chlorhydrique. Comme complément à ce qui précède, je vais rendre succinctement compte des résultats de ces dernières recherches.

La température dans le tambour fut toujours de 30°,5, la durée de l'osmose de 6 heures, et sous tous les autres rapports les expériences furent exécutées de la même manière que les précédentes; la membrane aussi était restée la même. Je commençai par déterminer exactement la vitesse osmotique de l'acide chlorhydrique et par soumettre à un nouvel examen celle du chlorure de sodium. Il fut trouvé ainsi que 0,5513 gr. d'acide chlorhydrique traversaient la membrane, lorsque le flacon à osmose contenait 0,9115 gr. de cet acide. Quant au sel marin, sa vitesse osmotiqne n'avait éprouvé qu'un léger changement. Dans les liquides obtenus par l'osmose d'une solution renfermant à la fois de l'acide chlorhydrique et du sel marin, ces deux matières furent dosées séparément. Pour cela, on procédait de la manière suivante. A 10 centimètres cubes du liquide on ajoutait un excès d'ammoniaque bien exempte de chlore, et on évaporait ce mélange jusqu'à disparition de la réaction alcaline. Une autre portion du liquide, également de 10 cc, était évaporée à siccité; le résidu était chauffé fortement pendant quelques instants, puis ramené, par l'addition d'eau distillée, au volume primitif.

Après cette préparation, dans chacune des deux fractions mesurées du liquide on dosait le chlore par titrage avec la solution argentique au 10e du titre normal. On avait alors toutes les données nécessaires pour calculer combien d'acide chlorhydrique et de sel marin il était passé par la membrane. Ces résultats étaient contrôlés par le titrage des liquides avec une solution de potasse au 10e du titre normal, et par des analyses à la balance. Les tableaux suivants font connaître les résultats obtenus.

Tableau VI.

Composition de la solution dans le flacon à osmose; exprimée en grammes.	Température dans le tambour.	Durée de l'osmose; en heures.	Quantité de chlorure de sodium et d'acid. chlorhydrique qui a traversé la membrane; expr. en grammes.		Quantité de chlorure de sodium et d'acide chlorhydrique qui doit traverser la membrane suivant le calcul; expr. en grammes.		Différence entre les résultats de l'expérience et du calcul.	
			chlor. de sodium.	ac. chlor-hydr.	chlor. de sodium.	ac. chlor-hydr.	chlor. de sodium.	ac. chlor-hydr.
Chlorure de sodium...1,4615 Acide chlorhydrique...0,9115	30°,5	6	0,8243	0,5345	0,8301	0,5513	0,0058	0,0168
Chlorure de sodium...1,4615 Acide chlorhydrique...0,5469	30°,5	6	0,8079	0,3208	0,8301	0,3307	0,0222	0,0099
Chlorure de sodium...1,4615 Acide chlorhydrique...0,3646	30°,5	6	0,8184	0,2087	0,8301	0,2205	0,0117	0,0118
Chlorure de sodium...1,4615 Acide chlorhydrique...0,1823	30°,5	6	0,8102	0,1058	0,8301	0,1102	0,0199	0,0044
Chlorure de sodium...1,4615 Acide chlorhydrique...0,07292	30°,5	6	0,8067	0,0436	0,8301	0,0441	0,0234	0,0005
Chlorure de sodium...1,4615 Acide chlorhydrique...0,0182	30°,5	6	0,8067	—	0,8301	—	0,0234	—

Tableau VII.

Composition de la solution dans le flacon à osmose; exprimée en grammes.	Température dans le tambour.	Durée de l'osmose; en heures.	Quantité de chlorure de sodium qui a traversé la membrane; expr. en grammes.	Quantité de chlorure de sodium qui doit traverser la membrane suivant le calcul; expr. en grammes.	Différence entre les résultats de l'expérience et du calcul.
Chlorure de sodium........ 0,73075 Acide chlorhydrique....... 0,45575	30°,5	6	0,38905	0,41505	0,02600
Chlorure de sodium........ 0,73075 Acide chlorhydrique....... 0,07292	30°,5	6	0,38934	0,41505	0,02571
Chlorure de sodium........ 0,73075 Acide chlorhydrique....... 0,00734	30°,5	6	0,39753	0,41505	0,01752
Chlorure de sodium........ 0,73075 Acide chlorhydrique....... 0,00183	30°,5	6	0,4209 [1]	0,41505	0,00585

Des chiffres contenus dans ces tableaux, on peut déduire ce qui suit:

1°. Lorsque le sel marin et l'acide chlorhydrique passent d'une solution commune, à travers la membrane, dans l'eau pure, leurs vitesses osmotiques sont plus faibles que celles qu'ils présentent quand ils sont soumis à l'osmose chacun séparément. Ils ne traversent donc pas la membrane indépendamment l'un de l'autre.

2°. L'influence exercée par l'acide chlorhydrique sur la vitesse du courant osmotique du sel marin ne varie que peu avec les quantités de l'acide. Une proportion très minime d'acide chlorhydrique suffit pour exercer cette influence.

3°. Les quantités d'acide chlorhydrique qui, d'une solution de sel marin de concentration déterminée (1,4615 gr. *Na Cl* sur 50 cc.), passent à travers la membrane dans l'eau pure, sont proportionnelles aux quantités d'acide chlorhydrique que la solution renfermait au début de l'expérience.

Des expériences ultérieures devront décider si les résultats

[1]) D'après ce dernier chiffre, il est probable que la vitesse osmotique du chlorure de sodium a encore un peu augmenté. La détermination de cet accroissement est toutefois sans intérêt, vu que l'exactitude relative des résultats ne peut en être sensiblement altérée.

énoncés en 2° et 3° s'appliquent aussi, inversement, au sel marin par rapport à l'acide chlorhydrique.

Pour s'assurer immédiatement que la relation exprimée en 3° est impliquée dans les chiffres du tableau, il suffit — admettant que la loi de proportionnalité se vérifie ici — de calculer combien, dans chaque expérience, il est passé d'acide chlorhydrique à travers la membrane, pour 0,07292 gr. d'acide chlorhydrique contenu dans le flacon.

Tableau VIII.

Composition de la solution dans le flacon à osmose; exprimée en grammes.	Quantité d'ac. chlorhydrique qui a traversé la membrane.	Quantité d'ac. chlorhydrique qui, pour 0,07292 gr. dans le flacon à osmose, a traversé la membrane.
Chlorure de sodium .... 1,4615 Acide chlorhydrique....... 0,9115	0,5345	0,04276
Chlorure de sodium .... 1,4615 Acide chlorhydrique....... 0,5469	0,3208	0,04277
Chlorure de sodium .... 1,4615 Acide chlorhydrique....... 0,3646	0,2087	0,04174
Chlorure de sodium .... 1,4615 Acide chlorhydrique....... 0,1823	0,1058	0,04230
Chlorure de sodium .... 1,4615 Acide chlorhydrique....... 0,07292	0,0436	0,04360

Si les expériences dont les résultats sont consignés dans le tableau II rendaient très probable que les chlorures de sodium, de potassium et d'ammonium, pris en solution commune, passent indépendamment l'un de l'autre à travers la membrane, on voit que cela n'est pas le cas pour le chlorure de sodium et l'acide chlorhydrique. Est-ce uniquement l'acide chlorhydrique qui fait exception à la susdite règle? Ou bien celle-ci ne s'applique-t-elle qu'à des substances très analogues par leur constitution et leurs propriétés chimiques? L'expérimentation seule pourra donner la réponse à cette question.

Heerenveen, juillet 1882.

DÉTERMINATION DES

VARIATIONS THERMOMÉTRIQUES PRODUITES PAR LA TENSION ET LE RELÂCHEMENT DES FILS MÉTALLIQUES,

ET DE

L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR;

PAR

H. HAGA.

Du principe de Carnot, M. Thomson a déduit, en 1851, la grandeur des variations de température qui doivent se produire lorsque la pression exercée sur un corps est subitement modifiée, ou lorsque — dans un cas particulier — un corps solide cylindrique subit une compression ou une traction dans la direction de son axe.

Si, dans ce cas,

P est le changement de pression sur un corps solide, dont
α est le coefficient de dilatation,
c la chaleur spécifique,
w le poids de l'unité de longueur,

on a pour la variation de température, à la température τ,

$$\vartheta = -\frac{(273 + \tau)\,\alpha P}{A\,w\,c},$$

où A représente l'équivalent mécanique de la chaleur.

M. Joule, qui vérifia la formule de Thomson pour l'eau et l'huile de baleine, avait auparavant expérimenté aussi sur des corps solides: métaux, différentes espèces de bois, caoutchouc [1]).

Les métaux furent employés sous la forme de cylindres ayant 3 décimètres de longueur et 6 millimètres de diamètre; l'extrémité supérieure était fixée solidement, et l'extrémité inférieure attachée à un levier, dont l'extrémité pouvait être chargée de poids. Pour la mesure des variations de température, deux minces fils, l'un de fer et l'autre de cuivre, étaient liés sur des côtés opposés de la barre, ou bien passés ensemble dans une petite ouverture percée à travers le milieu de la barre. A leur autre extrémité, ces deux fils étaient reliés à un galvanomètre sensible. Pour évaluer la déviation de l'aiguille en degrés Celsius, M. Joule procédait de la manière suivante [2]): „Immédiatement après chaque expérience sur l'effet de la tension, la valeur thermométrique de la déviation était déterminée en immergeant la barre, jusqu'à un tiers de pouce au-dessous de la jonction, dans de l'eau à différentes températures. Les déviations ainsi produites étaient environ les deux tiers de celles occasionnées par les mêmes changements de température quand la jonction était complètement immergée. La diminution de l'effet dans le premier cas est due en majeure partie à la soustraction de chaleur par l'air aux fils thermo-électriques. Les expériences de tension étaient sujettes à être affectées de la même manière, mais elles n'étaient pas exposées à la perte provenant de la conduction calorifique depuis la surface du bain jusqu'à la jonction. L'erreur imputable à cette dernière circonstance ne pouvait pas être grande, et elle était d'ailleurs, selon toute probabilité, presque exactement neutralisée par une petite erreur dans les expériences de tension, due à ce que la barre, d'un quart de pouce d'épaisseur, laissait échapper $^1/_{14}$

---

1) *Proceedings R. Soc.* 1857, Vol. VIII, p. 355. *Phil. Trans.* 1859, t. CXLIX.
2) *Phil. Trans.* 1859, p. 98.

de l'effet thermique pendant les 40 secondes que durait l'oscillation de l'aiguille".

A mon avis, ces déterminations ne sont pas à l'abri des objections [1]), et on s'explique aisément que, tout en confirmant d'une manière générale la formule de Thomson, elles aient laissé subsister quelque différence entre les variations de température observées et calculées. Dans les expériences d'étirement, les variations observées étaient toutes *plus grandes* que celles calculées avec $A = 425$; il en résulterait donc, pour l'équivalent mécanique de la chaleur, une valeur *moindre* que 425.

Dans les expériences où les métaux furent comprimés, — quelquefois à l'aide d'une presse hydraulique, — les valeurs calculées étaient tantôt trop fortes, tantôt trop faibles, mais il n'en restait pas moins des différences assez importantes [2]).

Verdet voit la raison de ces divergences dans l'inexactitude de la valeur du coefficient de dilatation, lequel peut dépendre de la tension.

En 1865, M. Edlund fit des expériences sur le même sujet [3]); différents fils métalliques furent tendus et détendus; un élément thermo-électrique, composé de deux métaux, servait à la détermination des variations de température, et à cet effet le fil se trouvait serré entre les deux métaux. M. Edlund trouva, pour 6 métaux différents, que les valeurs relatives des variations de température se laissaient bien représenter par la formule de Thomson, mais qu'il n'en était pas de même des valeurs absolues. La variation de température observée avec le fil d'acier conduisait à la valeur

$$A = 682,7.$$

Ce résultat est expliqué par M. Edlund au moyen du travail interne.

---

[1]) Comparer Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 220—224.

[2]) Voir, entre autres, Rühlmann, *Handbuch der mech. Wärmetheorie*, t. I, p. 251.

[3]) Pogg. *Ann.*, t. CXXVI, p. 539.

M. Rühlmann repousse cette explication [1]); effectivement, le travail interne ne saurait être la cause de la différence, puisque M. Thomson a déduit sa formule d'un cycle réversible, où l'on est indépendant du travail interne. M. Rühlmann examine aussi l'influence d'une valeur inexacte du coefficient de dilatation; or, les expériences de M. Dahlander [2]) ont prouvé que, chez les métaux, α croît à mesure que la tension augmente; une valeur plus grande de α rendrait A encore plus grand. Enfin, M. Rühlmann donne les raisons pour lesquelles il est improbable que la chaleur spécifique des métaux soit autre dans l'état de tension que dans l'état de détente; suivant lui, de nouvelles expériences peuvent seules trancher la question de savoir si les métaux se soustraient à la théorie mécanique de la chaleur. Pour ce but j'ai, de même que M. Edlund, choisi des fils métalliques et mesuré les variations de température que ces fils éprouvent quand on les tend et détend; en outre, j'ai déterminé, pour ces mêmes fils, le coefficient de dilatation à l'état de tension, ainsi que la chaleur spécifique.

I. Variations de température lors de la traction et du relâchement.

a. *Methode.*

L'appareil servant à tendre les fils est figuré Pl. VI. Sur une table étaient vissés, à gauche, un support en bois, à droite, une pièce de cuivre; la pièce de cuivre était traversée par deux vis d'acier, dont les extrémités coniques formaient l'axe horizontal autour duquel pouvait tourner un levier coudé; le court (10,5 cm.) bras vertical de ce levier constituait une pince, dans laquelle était serré un cylindre d'ébonite, à axe perforé; par cette

[1]) *l. c.*, p. 529.

[2]) Pogg. *Ann.*, t. CXLV, p. 147.

ouverture et par une rainure pratiquée dans le support en bois passait le fil métallique, qui pouvait être tendu suffisamment au moyen de deux petites plaques de cuivre soudées sur lui.

La position horizontale avait été choisie pour le fil afin de pouvoir obtenir une température uniforme, résultat qui était parfaitement atteint à l'aide d'un toit de ouate reposant de tous les côtés sur la table.

En faisant glisser des poids sur le long bras (60 cm.) du levier, on modifiait à volonté la tension; la grandeur du déplacement se laissait régler au moyen d'une pince en cuivre, vissée sur le bras. On faisait mouvoir les poids en allant de cette pince vers l'extrémité, ou vice-versâ, de sorte que le fil restait toujours tendu.

Les changements de température qui avaient lieu lors de la traction et du relâchement devaient être mesurés. A cet effet, un très mince fil d'un métal présentant une grande différence thermo-électrique avec le fil principal, était enroulé 2 fois autour de celui-ci; toute variation de température, qui se produisait au point de contact, excitait donc, lorsqu'une des extrémités du fil principal était reliée au fil mince, un courant thermo-électrique, dont l'intensité pouvait être mesurée en introduisant un galvanomètre dans le circuit (Pl. VI, fig. 1). Pour déduire de la déviation (p) du galvanomètre la variation de température (ϑ), deux quantités doivent être déterminées:

1°. r, la résistance du circuit total; $p \times r$ est alors la déviation correspondant au cas où la résistance eût été de 1 Siemens.

2°. E, la déviation qu'occasionnerait, dans le cas d'une résistance égale à 1 Siemens, une différence de température de 1° C au point de contact; on a alors

$$\vartheta = \frac{p \times r}{E}.$$

Le galvanomètre était du système Thomson, à petite résistance; au moyen d'aimants convenablement placés on augmentait l'astasie, de sorte que la durée d'oscillation (T) s'élevait à

environ 6 secondes; par là il devenait possible d'employer la méthode de rejet pour la détermination de r. Un petit aimant inducteur était intercalé dans le circuit, ainsi qu'un banc de résistance. Dans la méthode de rejet, le grand arc a et le petit arc b peuvent être mesurés avec beaucoup d'exactitude; le décrément logarithmique λ $\left(e^{\lambda} = \frac{a}{b}\right)$ et, par suite,

$$\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a\,b}}\, e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\pi}}$$

peuvent être calculés; or, cette expression est proportionnelle à l'intensité des courants d'induction excités par le mouvement de l'aimant [1]); si donc on détermine a et b lorsque la résistance est $= r$, puis, après addition de 1 S., pour une résistance $= r + 1$, il suffit de calculer dans les deux cas l'expression ci-dessus, pour connaître le rapport des résistances, et par conséquent r, en unités Siemens. Désirait-on, toutefois, connaître a et b à moins de ½ pour cent près, il fallait remplacer la lecture objective, ordinairement employée avec le galvanomètre de Thomson, par une lecture subjective. On y parvenait, sans substituer un miroir plan au petit miroir concave, en faisant usage d'une petite lunette (longueur 11 cm.), composée d'un objectif ($f = 12{,}3$ cm., ouverture 4,5 cm.) et d'un oculaire ($f = 25{,}8$ cm.), entre lesquels était tendu un fil de cocon; la lunette était placée un peu plus loin du galvanomètre qu'une échelle sur verre divisée en millimètres, dont l'image pouvait être observée très nettement, de sorte que la lecture était parfaitement sûre à $^1/_{10}$ de mm. près.

Pour déterminer E (voir Pl. VI, fig. 3), le fil mince fut soudé sur le fil principal, puis cette soudure, de même que les autres points de contact entre le fil principal et le fil mince, fut plongée, avec les fils conduisant au galvanomètre, dans un grand verre d'eau à la température de l'appartement, afin de les

[1]) Voir Weber: *Maassbestimmungen*, et aussi Wiedemann, t. II. 1, p. 250.

maintenir à la même température (τ); la résistance (R) du circuit fut alors déterminée; ensuite, le point de contact du fil principal avec le fil mince fut entouré de glace fondante; pour maintenir les déviations dans les limites de l'échelle, on introduisait un nombre déterminé (S) d'unités Siemens.

Si, dans ce cas, la déviation est u, on a

$$E = \frac{u\,(S + R)}{\tau}.$$

Cette détermination de E ne présente donc aucune difficulté. Il en est autrement de celle de la quantité désignée en premier lieu, la déviation p. De l'écart initial on peut bien, à l'aide du décrément logarithmique, déduire l'écart permanent pour des courants *constants;* mais le courant thermo-électrique, qui prend naissance dans notre cas, n'a pas ce caractère de constance, et cela pour deux raisons:

D'abord, le déplacement des poids n'est pas instantané, et, tant que dure ce déplacement, l'état d'équilibre change; en second lieu, à peine produite, la variation de température décroît de nouveau, par l'effet de la conductibilité et du rayonnement. De là, et de la durée assez courte de l'oscillation, il résulte que l'aiguille, après un petit nombre de balancements, revient peu à peu à sa position primitive. On peut encore observer exactement les trois premiers points de rebroussement, x_1, x_2 et x_3, et en outre la position d'équilibre à des instants déterminés, durant le lent retour à l'état originel. Au moyen de ces observations on peut calculer p de la manière suivante, qui m'a été communiquée par M. H. Kamerlingh Onnes:

Le déplacement des poids s'opérait toujours en moins de 2 secondes; la durée d'oscillation de l'aimant était d'environ 6 secondes; lors donc que l'aimant a exécuté son premier écart, son mouvement ultérieur sera représenté complètement par l'équation différentielle établie par M. Edlund [1]:

$$\frac{d^2x}{d\,t^2} = -\,m\,x + q\,\frac{v}{w\,\varsigma} - 2n\,\frac{dx}{dt},$$

[1]) *l. c.*, p. 546.

où m désigne la force directrice, $2\,n$ la force d'extinction pour une vitesse $=1$, q la force qu'un courant thermo-électrique exerce sur l'aimant lorsque $\frac{v}{w\,c}=1$, — toutes ces quantités étant divisées par le moment d'inertie. La lettre v désigne ici la quantité de chaleur développée dans le fil dont w est le poids et c la chaleur spécifique, de sorte que $\frac{v}{w\,c}$ représente la variation de température. La variation de v, par conductibilité et rayonnement, peut être regardée comme proportionnelle à la variation de la température elle-même; on a donc:

$$d\,v = -\,a\,\frac{v}{w\,c}\,d\,t$$

et par suite:

$$v = v_0\,e^{-\frac{a\,t}{wc}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation différentielle et intégrant, on obtient:

$$x = \frac{C}{h^2 - 2\,hn + m}\left(e^{-\,ht} + \frac{h-n}{t}\,\sin l\,t\,e^{-\,nt} - \cos l\,t\,e^{-\,nt}\right),$$

où $\quad C = \frac{q\,v_0}{w\,c} \quad l = \sqrt{m - n^2}$ et $h = \frac{a}{w\,c}$.

On déduit de là pour les temps de rebroussement:

$$\sin l\,T\,e^{-\,n\,T} = \frac{h\,l}{m - h\,n}\,(e^{-\,h\,T} - \cos l\,T\,e^{-\,n\,T})$$

et pour les points de rebroussement:

$$x = \frac{C}{m - h\,n}\,(e^{-\,h\,T} - \cos l\,T\,e^{-\,n\,T}).$$

Or h, c'est-à-dire le décroissement (+ ou —) de la température en 1 sec. pour une différence de température de 1° C, est très petit, — dans mes expériences, égal à 0,01, — de sorte que h^2 peut être négligé.

Supposons que, pour $h = 0$, on ait trouvé, au moyen de l'équation $\sin l\, T_0\, e^{-n T_0} = 0$, les temps de rebroussement T_0, $2\, T_0$, etc.

Pour le premier rebroussement, on aurait alors $\cos l\, T_0 = -1$,
„ „ second „ . . . . $= -1$,
etc.,

Si maintenant (attendu que h n'est pas $= 0$) à T_0 il faut ajouter $d T_1$,
„ $2 T_0$ . . . . $d T_2$,
etc.

et si T_1, T_2, etc. satisfont à l'équation, on doit avoir aussi :

$$\frac{d \sin l\, T_1\, e^{-n T_1}}{d\, T_1} d\, T_1 = \frac{h\, l}{m - h\, n} (1 - \cos l\, T_1\, e^{-n T_1}),$$

et de même pour T_2, etc. ; ou :

$$d\, T_1 = -\frac{h}{m - h\, n} (1 + e^{-n T_1})\, e^{n T_1}$$

$$d\, T_2 = \frac{h}{m - h\, n} (1 - e^{-n T_2})\, e^{n T_2}$$

$$d\, T_3 = -\frac{h}{m - h\, n} (1 + e^{-n T_3})\, e^{n T_3}.$$

Cette valeur de T_1 transforme l'expression

$$x = \frac{C}{m - h\, n} (e^{-h T_0} - \cos l\, T_0\, e^{-n T_0})$$

en

$$x + \frac{d\, x}{d\, T_1} d\, T_1\, ;$$

il en est de même des valeurs de T_2 et T_3, de sorte que, après réduction, on trouve pour les points de rebroussement:

$$x_1 = \frac{C}{m} \left\{ (1 + e^{-n T_1}) \left(1 + \frac{2\, n\, h}{m} \right) - (1 - e^{-h T_1}) \right\}$$

$$x_2 = \frac{C}{m}\left\{(1 - e^{-nT_2})\left(1 + \frac{2nh}{m}\right) - (1 - e^{-hT_2})\right\}$$

$$x_3 = \frac{C}{m}\left\{(1 + e^{-nT_3})\left(1 + \frac{2nh}{m}\right) - (1 - e^{-hT_3})\right\}$$

En désignant par X_1, X_2 et X_3 les points de rebroussement pour $h = 0$, on a:

$$X_2 - X_1 = \left\{(x_2 - x_1) + (e^{-hT_1} - e^{-hT_2})\frac{C}{m}\right\}\left(1 - \frac{2nh}{m}\right)$$

$$X_3 - X_1 = \left\{(x_3 - x_1) + (e^{-hT_1} - e^{-hT_3})\frac{C}{m}\right\}\left(1 - \frac{2nh}{m}\right)$$

Si h, C, m, n et T sont connus, on peut donc calculer combien il faut ajouter à $x_2 - x_1$ et à $x_3 - x_1$ pour obtenir $X_2 - X_1$ et $X_3 - X_1$. A l'aide de ces dernières valeurs, on trouvera de combien la position d'équilibre (X) est éloignée de x_1 au moment du premier écart. Cette position d'équilibre doit alors subir encore deux corrections:

1° pour le refroidissement (+ ou —) durant le temps T_1;

2° pour le temps t' que durent la traction et le relâchement.

Si la position d'équilibre est à chaque instant x_e, on a, en cas d'étirement (+ ou —) avec une vitesse uniforme et de refroidissement (+ ou —) suivant la loi géométrique,

$$\frac{dx_e}{dt} = s - hx_e,$$

où $s = \frac{p}{t'}$, puisque p représentait la déviation; l'intégration donne:

$$x_e = \frac{p}{ht'} + \text{const.}\, e^{-ht};$$

pour $t = 0$ on a $x_e = 0$, donc const. $= -\frac{p}{ht'}$, de sorte que

$$x_e\text{, après } t' \text{ sec,} = \frac{p}{ht'}(1 - e^{-ht'})$$

et

$$\text{après } t \text{ sec}, = \frac{p}{h\,t}(1 - e^{-h\,t})$$

ou

$$= \frac{p}{h\,t'}(1 - e^{-h\,t'})\,e^{-h\,(t - t')}.$$

Lors du premier rebroussement de l'aimant on a donc

$$X = \frac{p}{h\,t'}(1 - e^{-h\,t'})\,e^{-h\,(T_1 - t')},$$

ou

$$X = p\left(1 - \frac{h\,t'}{2}\right)(1 + h\,t')\,e^{-h\,T_1},$$

ou encore

$$X = p\left(1 + \frac{h\,t'}{2}\right)e^{-h\,T_1};$$

par conséquent

$$p = X\left(1 - \frac{h\,t'}{2}\right)e^{h\,T_1}.$$

Comme première approximation, on peut poser $T_1 = T_0 + \frac{t'}{2}$, de sorte qu'il vient finalement

$$p = X\,e^{h\,T}.$$

De même, dans les expressions pour $X_2 - X_1$ et $X_3 - X_1$, on a employé, au lieu de T_1, T_2 et T_3, respectivement T, $2\,T$, $3\,T$, — le temps d'oscillation ordinaire.

Il reste à déterminer h, C et T, vu que m et n peuvent être calculés à l'aide du décrément logarithmique λ et de T:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{m - n^2}}, \quad \lambda = n\,T.$$

Pour trouver h, des lectures furent faites, à des moments déterminés, durant le lent retour à la position originelle; si, aux temps t_1 et t_2, ont été observées les déviations x' et x'', on a

$$x' = C\,e^{-h\,(t_1 - t)} \qquad x'' = C\,e^{-h\,(t_2 - t)},$$

où t est l'instant du premier rebroussement. On déduit de là:

$$h = \frac{\log x' - \log x''}{(t_2 - t_1) \log e}.$$

C ou $\frac{C}{m}$ se trouve au moyen des expressions pour x_2 et x_1; par soustraction on obtient:

$$\frac{C}{m} = \frac{x_1 - x_2}{\left(1 + \frac{2\,n\,h}{m}\right)(e^{-n T_1} + e^{-n T_2}) + (e^{-h T_1} - e^{-h T_2})}.$$

T, enfin, a été trouvé de la manière connue: on pouvait employer ici la méthode de rejet, en donnant à un moment déterminé la secousse d'induction, rejetant un certain nombre de fois et déterminant le moment où l'aimant passait par la position d'équilibre. Du nombre des rejets opérés, on déduit facilement la valeur de T.

b. Expériences.

1. Fil d'acier.

Le fil d'acier employé avait un diamètre de 1,6 mm. Pour fil mince, on prit d'abord un fil de maillechort d'un diamètre de 0,105 mm., avec lequel on expérimenta pendant deux jours; le second jour surtout, la résistance varia assez sensiblement lors de la traction et du relâchement, par suite de la raideur du maillechort; pour cette raison, on choisit un fil mince de platine (diamètre 0,08 mm.), qui, nonobstant la valeur moindre de la différence thermo-électrique, fournit des résultats mieux concordants entre eux.

Comme exemple, je citerai l'expérience suivante, la première du 26 septembre 1880.

1°. Point de repos du galvanomètre: 103,8.

Le fil fut tendu par le déplacement des poids; il se produisit un refroidissement et on observa les points de rebroussement

suivants:

x_1 171,0 d'où: premier écart: 67,2
x_2 138,3 $x_2 - x_1$ 32,7
x_3 147,7 $x_3 - x_1$ 23,3

2°. Durant le lent retour, les positions d'équilibre furent

125,0 . . . 120,0 . . . 116,0, respectivement
70^s . . . . 95^s,5 . . . 121^s après que le premier écart eut été atteint

3°. Par la méthode de rejet, on trouva:

$$a = 169,8$$
$$b = 71,1$$

et après l'intercalation de 1 S,

$$a = 88,6$$
$$b = 40,3.$$

4°. La durée d'oscillation était: 6^s,44.

A l'aide de ces données, on calcula:

De 2° et des observations analogues du même jour:

$$h = 0,0114.$$

De 3°: $r = 1,067\ S.$

Avec la valeur de λ:

$$log\ m = 9,40663$$
$$log\ n = 9,12552,$$

puis:

$$e^{-n T_1} = 0,4227 \qquad e^{-h T_1} = 0,9291$$
$$e^{-n T_2} = 0,1787 \qquad e^{-h T_2} = 0,8633$$
$$\frac{2\,h\,n}{m} = 0,01 \qquad e^{-h T_3} = 0,8021,$$

d'où:

$$log\,\frac{C}{m} = 1,6856$$

$$X_2 - X_1 = 29,2 \qquad X_3 - X_1 = 17,0,$$

donnant pour les distances de X à x_1, au moment du premier écart, respectivement [1])

$$20{,}5 \qquad\qquad 20{,}6,$$

de sorte que

$$X = 67{,}2 - 20{,}55 = 46{,}65.$$

En multipliant cette valeur par $e^{\lambda T} = 1{,}076$, on obtient

$$p = 50{,}20,$$

et en réduisant à la résistance $= 1$ S,

$$p \times r = 53{,}55.$$

Par des expériences exécutées le jour suivant, la valeur de E, c'est-à-dire de la déviation qu'une différence de 1° C dans la température du point de contact donne pour une résistance de 1 S, fut trouvée égale à 528, d'où

$$\vartheta = \frac{53{,}55}{528} = 0^0{,}1042$$

pour l'abaissement de température observé.

Après cette première expérience, on fit reculer les poids, ce qui amena le relâchement du fil. Les mêmes opérations furent ensuite répétées un certain nombre de fois. Dans les tableaux suivants sont consignés les résultats principaux des expériences et des calculs auxquels elles ont servi de base.

Tableau I.

Poids tenseur 21,715 k. 26 *sept.* 1880. Température 17°,1.

Numéro.	Nature de l'exp.	Premier écart.	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	*a.*	*b.*	Intercalé 1 Siemens. *a.*	Intercalé 1 Siemens. *b.*
1	Tension.....	67.2	32.7	23.3	169.2	71.0	88.6	40.3
2	Relâchement	68.1	32.7	23.8	167.8	70.6		
3	Tension.....	66.8	32.4	22.9	166.7	70.3	87.6	40.2
4	Relâchement	67.3	32.7	24.0	164.4	69.5	86.6	39.7
5	Tension.....	65.0	31.6	22.2	165.0	69.9		
6	Relâchement	66.5	32.3	23.8	163.15	69.65		
7	Tension.....	64.4	31.8	20.4	163.15	69.65		
8	Relâchement	66.0	32.5	23.9	162.1	69.2		

[1]) Dans ce calcul, on a employé la valeur déjà connue de λ.

d'où, à l'aide des valeurs déjà données, on déduit par le calcul:

Tableau II.

Numéro.	$log \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ et distance de X à x_1.		$X_3 - X_1$ et distance de X à x_1.		$p = X\,ehT$.	Résistance. r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.68563	29.2	20.5	17.0	20.6	50.2	1.096	0.1042
2	1.68563	29.2	20.5	17.5	21.0	50.9	1.089	0.1050
3	1.68163	28.9	20.3	16.6	20.3	50.0	1.104	0.1046
4	1.68563	29.2	20.5	17.7	21.1	50.0	1.110	0.1050
5	1.67077	28.2	19.8	16.1	19.7	48.8	1.102	0.1018
6	1.68028	28.8	20.2	17.5	20.9	49.4	1.114	0.1043
7	1.67351	28.4	20.0	14.3	18.5	48.6	1.114	0.1026
8	1.68296	29.0	20.4	17.6	21.0	48.7	1.117	0.1030

Moyenne... 0.1038

Le fil mince de maillechort fut un peu déplacé; le poids tenseur resta le même.

Tableau III.

27 *sept.* 1880. Température 17°,0.

Numéro.	Nature de l'exp.	Premier écart.	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	*a.*	*b.*	Intercalé 1 Siemens. *a.*	*b.*
1	Tension.....	65.7	30.7	21.0	159.4	67.7	85.5	39.0
2	Relâchement	64.0	30.2	21.1	152.8	65 4	83.3	38.3
3	Tension.....	56.7	26 4	17.4	145.3	62.8		
4	Relâchement	64.6	30.2	21.7	156.1	66.7		
5	Tension.....	57.3	26.4	17.7	150.0	64.4		
6	Relâchement	65.8	30.7	21.8	157.8	67.4		

$$h = 0.0093 \qquad T = 6^s.44$$

d'où

$$e^{-nT_1} = 0.4281 \qquad e^{-hT_1} = 0.9418$$
$$e^{-nT_2} = 0.1833 \qquad e^{-hT_2} = 0.8870$$
$$\frac{2hn}{m} = 0.0096 \qquad e^{-hT_3} = 0.8353$$
$$\log n = 9.11904 \qquad \log m = 9.40575.$$

Tableau IV.

Numéro.	$\log \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ et distance de X à x_1.		$X_3 - X_1$ et distance de X à x_1.		$p = X e^{hT}$.	Résistance. r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.65971	27.9	19.55	15.95	19.55	49.0	1.15	0.1065
2	1.65258	27.5	19.25	16.15	19.55	47.35	1.20	0.1072
3	1.59417	24.0	16.8	13.05	16.35	42.6	1.26	0.1016
4	1.65258	27.5	19.25	16.75	19.95	47.8	1.73	0.1061
5	1.59417	24.0	16.8	13.35	16.55	43.1	1.22	0.1012
6	1.65971	27.9	19.55	16.75	20.1	48.85	1.16	0.1069

Moyenne 0.1049

Ensuite on détermina, de la manière susdite, la valeur de E; la résistance $R = 4{,}08$ S.

Tableau V.

Résistance intercalée S.	Température de l'eau τ.	Ecart double $2u$.	Ecart double pour 1 S. par 1° C.
150	17.6	121.45	1060.3
170	17.5	107.2	1066.4
270	17.4	66.9	1054
130	17.3	135.15	1047
110	17.2	158.6	1052

Moyenne 1056, donc $E = 528$.

Au lieu du fil mince de maillechort, on prit alors le fil mince de platine.

Tableau VI.

30 *sept.* 1880. Température 16°,7.

Numéro.	Nature de l'exp.	Premier écart.	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	*a.*	*b.*	Intercalé 1 Siemens. *a.*	Intercalé 1 Siemens. *b.*
1	Tension	48.2	22.4	16.4	166.5	68.3	76.1	35.3
2	Relâchement	48.4	22.4	16.7	166.4	68.7		
3	Tension	46.5	21.8	16.0	165.5	68.4		
4	Relâchement	48.4	22.8	17.0	166.1	68.6		
5	Tension	46.7	21.8	16.0	165.1	68.1		
6	Relâchement	48.2	22.6	17.0	166.0	68.3	76.3	35.5

$$h = 0.0117 \qquad T = 6^s.55$$
$$log\, n = 9.13101 \qquad log\, m = 9.39503$$
$$e^{-nT_1} = 0.4125 \qquad e^{-hT_1} = 0.9202$$
$$e^{-nT_2} = 0.1701 \qquad e^{-hT_2} = 0.8467$$
$$\frac{2hn}{m} = 0.014 \qquad e^{-hT_3} = 0.7791$$

Tableau VII.

Numéro.	$log\,\frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ et distance de X à x_1.		$X_3 - X_1$ et distance de X à x_1.		$p = X e^{hT}$.	Résistance. r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.52839	19.65	13.9	11.5	13.85	37.3	0.843	0.1066
2	1.52839	19.65	13.9	11.8	14.1	37.4	0.843	0.1069
3	1.51660	19.15	13.55	11.2	13.5	35.85	0.852	0.1036
4	1.53607	20.0	14.15	12.0	14.35	37.1	0.843	0.1060
5	1 51660	19.15	13.55	11.2	13.5	36.05	0.852	0.1041
6	1.53225	19.85	14.05	12.05	14.35	36.95	0.843	0.1056

Moyenne.. 0.1055

Pour la détermination de E, on trouva, avec $R = 3{,}17$ S.

Tableau VIII.

1 *octobre* 1880.

Résistance intercalée S.	Température de l'eau τ.	Ecart double $2u$.	Ecart double pour 1 S. par 1° C.
150	16.15	62.9	596.6
125	16.1	74.0	589.1
100	16.05	91.6	588.8
80	16.0	112.7	585.8
		$2E$	590.0
			$E = 295.0$

La combinaison de tous les résultats donne:

date	ϑ
26 sept.	0.1038
27 „	0.1049
30 „	0.1055

En moyenne, $\vartheta = 0.1046$

2. Fil de maillechort.

Le fil de maillechort sur lequel j'expérimentai, avait un diamètre de 1,5 mm.; pour fil mince, je choisis de nouveau un fil de platine (diamètre 0,08 mm.). On procédait de la même manière qu'avec le fil d'acier; seulement, la valeur de E était déterminée directement avant ou après les expériences; à cet effet, un circuit était composé avec d'autres portions du même fil de maillechort et du même fil de platine, et ce circuit était comparé, après l'achèvement des expériences, avec celui formé des fils mêmes employés dans ces expériences. On trouva ainsi:

	E
14 sept., à 3 instants différents: moyenne . . .	201.0
15 sept., immédiatement après les expériences, .	204.55
et le 17 sept., avec le circuit du 14 et 15 sept., . .	200.15
avec le circuit des fils employés . . .	202.3

ce qui donne:

$$14 \text{ sept. } E = 201.0 \; \frac{202.3}{200.15} = 203.2$$

$$15 \text{ sept. } E = 204.55 \; \frac{202.3}{200.15} = 206.8.$$

Tableau IX.

Poids tenseur 17.134 k. 14 *sept.* 1881. Température 16,°4.

Numéro.	Nature de l'exp.	Premier écart.	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	*a.*	*b.*	Intercalé 1 Siemens.	
							a.	*b.*
1	Tension.....	46.5	19.3	14.1	192.3	78.45	87.4	39.3
2	Relâchement	44.9	19.7	13.8	189.8	78.0		
3	Tension.....	45.2	19.1	13.4	190.95	78.25		
4	Relâchement	44.8	19.8	13.5	191.15	78.1	87.0	39.9
5	Tension.....	45.7	19.1	13.7	191.2	78.2		
6	Relâchement	44.6	19.7	13.5	190.95	78.0		
7	Tension.....	46.0	19.5	13.7	193.2	79.1	87.9	40.6
8	Relâchement	44.8	19.8	13.8	192.65	78.9	88.4	40.45
9	Tension.....	45.5	18.6	13.2	194.1	79.3		
10	Relâchement	45.2	19.9	13.7	192.9	78.8		

$h = 0.0088 \qquad T = 6^s.35$

$\log n = 9.14834 \qquad \log m = 9.42254$

$e^{-nT_1} = 0.4092 \qquad e^{-hT_1} = 0.9458$

$e^{-nT_2} = 0.1675 \qquad e^{-hT_2} = 0.8945$ pour N°. 1

$\frac{2hn}{m} = 0.009 \qquad e^{-hT_3} = 0.8460$ à N°. 6.

d'où:

Tabel X.

Numéro.	$log\ \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ et distance de X à x_1.		$X_3 - X_1$ et distance de X à x_1.		$p = X\,ehT$.	Résistance. r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.4841	17.6	12.5	10.95	12.9	35.75	0.826	0.1453
2	1.4930	17.95	12.75	10.6	12.75	34.0	0.846	0.1416
3	1.4795	17.4	12.35	10.3	12.35	34.75	0.836	0.1429
4	1.4952	18.05	12.8	10.25	12.5	34.0	0.836	0.1398
5	1.4795	17.4	12.35	10.6	12.6	35.15	0.836	0.1446
6	1.4930	17.95	12.75	10.3	12.5	33.85	0.836	0.1392
7	1.4898	17.8	12.65	10.6	12.7	35.1	0.838	0.1447
8	1.4965	18.1	12.85	10.6	12.8	33.65	0.838	0.1387
9	1.4693	17.0	12.05	10.25	12.25	35.1	0.828	0.1431
10	1.4987	18.2	12.9	10.55	12.75	34.1	0.838	0.1406
							Moyenne..	0.1421

Le fil de platine fut déplacé.

Tableau XI.

15 *sept.* 1881. Température 16°.0.

Numéro.	Nature de l'exp.	Premier écart.	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	a.	b.	Intercalé 1 Siemens. a.	b.
1	Tension	46.7	19.1	13.9	196.5	80.3	88.75	40.7
2	Relâchement	45.55	19.95	13.85	195.55	80.3		
3	Tension	45.45	18.45	13.45	195.0	80.1		
4	Relâchement	45.16	19.65	13.25	195.1	80.0	88.6	40.85

$h = 0.00845 \qquad T = 6^s.35$

$log\ n$, $log\ m$, e^{-nT_1}, e^{-nT_2} } = 14 sept.

$e^{-hT_1} = 0.9478$, $e^{-hT_2} = 0.8983$, $e^{-hT_3} = 0.8513$ } aussi pour N°. 7 — N°. 10 14 sept.

$$\frac{2hn}{m} = 0.009$$

d'où l'on déduit:

Tableau XII.

Numéro.	$log\ \frac{C}{m}$.	$X_2 - X_1$ et distance de X à x_1.		$X_3 - X_1$ et distance de X à x_1.		$p = X\ ehT$.	Résistance. r.	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$.
1	1.4808	17.45	12.4	10.9	12.8	35.95	0.819	0.1423
2	1.4998	18.25	12.95	10.7	12.9	34.35	0.829	0.1377
3	1.4658	16.85	11.95	10.55	12.45	34.45	0.829	0.1382
4	1.4932	17.95	12.75	10.15	12.4	34.3	0.829	0.1375

Moyenne.. 0.1389

En résumé, on a donc trouvé pour la variation de température:

14 sept. 0.1421
15 „ 0.1389

En moyenne, $\vartheta = 0.1405$.

Avec le même fil de maillechort, on a encore recherché si la variation de température est proportionnelle au poids tenseur. Ces expériences ont eu lieu à jours différents; il a été tenu compte de la variation en sensibilité.

15, 16 et 17 *juin* 1881.

Poids tenseur.	ϑ, en moyenne de 8 expériences.	ϑ par kilogr.
13.05 kilogr.	0.1063	0.00814
21.30 „	0.1725	0.00812

Comme le coefficient de dilatation était le même pour ces deux tensions (voir plus loin), la proportionnalité de ϑ à P se trouve démontrée.

L'accord en question sert en même temps de preuve que le fil peut être regardé comme se trouvant constamment dans un

état d'équilibre, ce qui était d'ailleurs probable, vu que le temps durant lequel s'effectuait le changement d'état était très grand par rapport au temps qu'une vibration met à parcourir le fil. En raison de la faible valeur de h, le changement dont il s'agit peut être estimé ne s'écarter que d'une manière insensible d'un changement adiabatique parfait, de sorte qu'il est permis d'appliquer la formule de Thomson, valable pour les processus adiabatiques, réversibles. Des expériences spéciales ont démontré, en outre, que, pour les contacts employés: acier-maillechort, acier-platine, maillechort-platine, il y a proportionnalité entre la force thermo-électromotrice et la température, dans les limites employées: glace — eau à la température ambiante — vapeur d'éther — vapeur d'eau. On n'a pas non plus trouvé de différence dans la valeur de E, que le fil fût tendu ou qu'il ne le fût pas, ni lorsque, après que les contacts avaient été défaits, les fils étaient fortement chauffés, puis ressoudés; aucune objection ne peut donc être élevée, ni contre la manière dont E a été déterminé, ni contre la manière dont il en a été tenu compte.

II. Coefficients de dilatation des fils à l'état de tension.

Les fils dont il s'agissait de mesurer le coefficient de dilatation étaient tendus dans le même appareil qui avait servi à la détermination des variations de température.

Pour que le fil pût être amené à deux températures inégales constantes, il était placé dans l'axe d'un tube de cuivre, entouré lui-même d'un autre tube plus large; l'espace intermédiaire pouvait être traversé soit par un courant d'eau, soit par un courant de vapeur, dont la température se communiquait ainsi à l'air et au fil contenus dans le tube intérieur; les extrémités

de celui-ci étaient fermées par des bouchons de liège, qui glissaient facilement sur le fil; le tube extérieur était encore enveloppé d'une épaisse couche de liège, destinée à prévenir la déperdition de chaleur par voie de rayonnement. A 5 cm. des extrémités du tube intérieur étaient soudés sur lui deux petits tubes latéraux, fermés chacun par une lame de glace, à travers laquelle le fil se laissait voir. A ces endroits, le fil portait des traits, gravés à l'aide d'une aiguille très fine, sur lesquels étaient dirigés deux microscopes à vis micrométrique.

De la mesure du déplacement des traits il n'était permis de conclure au coefficient de dilatation, que si les microscopes étaient installés de manière que leur distance ne changeât pas, ou que le changement pût être évalué.

Lors de la détermination de α pour le fil d'acier, les microscopes étaient fixés sur des blocs de bois, scellés eux-mêmes, au plâtre, sur une solide table en pierre; au moyen de ouate et de bois, la table était garantie des variations de température. Pour le fil de maillechort, les blocs de bois furent embrochés sur un tube de cuivre reposant sur des pieds du même métal, et le tout fut placé dans une grande auge remplie d'eau, de manière que les microscopes seuls émergeassent; la plus forte variation qui se produisit dans la température de l'eau, entre deux expériences, ne s'éleva qu'à 0°,1.

L'une et l'autre méthode satisfirent très bien. Pour la tension, on prit la moyenne de celles qui correspondaient à l'état de tension et à l'état de relâchement.

En décembre 1880 fut déterminé le

Coefficient de dilatation du fil d'acier.

Tension = 19 kilogrammes.

Distance des deux traits du fil: 330,7 mm.

1287 divisions du tambour de la tête de vis donnaient un déplacement de 1 mm.

Différence de température.	Allongement, en divisions de la tête de vis.	Coefficient de dilatation.
86°.8	428.4	0.00001159
86°.4	425.0	1156
86°.65	425.5	1154
		$\alpha = 0.00001156$

En octobre 1881 fut déterminé le

Coefficient de dilatation du fil de maillechort.

Tension = 16 kilogrammes.
Distance des deux traits du fil: 324 mm.
Chez l'un des microscopes, 10 pas de la vis = 0,9293 mm.
Chez l'autre, " " " " " = 0,9689 "
(le tambour était divisé en 100 parties).

$$\alpha = 0{,}00001739$$
$$1725$$
$$1731$$
$$1741$$
$$\alpha = 0{,}00001734.$$

La même valeur a été trouvée pour des tensions de 12 et de 20 kilogrammes [1]).

III. Chaleur spécifique.

Pour la détermination de la chaleur spécifique, je pus me servir de la méthode des mélanges: les fils étant coupés en fragments très menus, le calorimètre prenait en moins de $\frac{1}{2}$ minute la température maximum, ce qui dispensait de l'emploi de termes de correction [2]).

[1]) Voir Joule, *Proceedings R. Soc.*, t. VIII, p. 564; Rühlmann, p. 526.
[2]) Voir Müller-Pfaundler, t. II, p. 297.

Le calorimètre, en tôle de cuivre très mince, était placé, sur 3 cales de liège, dans un vase plus large; l'agitateur était un morceau de gaze de cuivre, fixé à deux minces fils de cuivre.

Pour être à l'abri des inconvénients attachés à l'emploi d'un thermomètre dans les expériences calorimétriques (capacité calorifique, lenteur des indications, difficulté de lui donner une bonne place dans le calorimètre), on fit usage d'une aiguille thermo-électrique, formée de deux minces fils de maillechort et de platine, dont la soudure était placée directement sous l'agitateur et montait ou descendait avec lui. Les deux autres extrémités de ces fils étaient soudées aux fils conduisant au galvanomètre de Thomson, et ces dernières soudures plongeaient dans un grand verre d'eau, qui était agitée continuellement. Le galvanomètre était réglé de manière que l'oscillation eût une durée d'environ 2 secondes; néanmoins, une variation de température de 1° C à la soudure maillechort-platine donnait une déviation d'environ 14 divisions de l'échelle, de sorte que $^1/_{140}$ de degré était appréciable. Pour déterminer exactement le nombre en question, la soudure était placée, immédiatement après l'expérience calorimétrique, dans la glace fondante; les déviations tombaient encore dans les limites de l'échelle, de sorte qu'on n'avait pas besoin de connaître la résistance.

Des expériences spéciales apprirent que la force thermo-électromotrice n'était pas exactement proportionnelle à la différence de température, mais augmentait un peu plus rapidement que cette différence. Il a été tenu compte de cette circonstance.

Pour chauffer les fragments de fils, on employait le même appareil qui avait servi à la détermination des coefficients de dilatation; les fragments, contenus dans un petit tube d'essai à parois très minces, étaient introduits dans le tube intérieur, et lorsque la vapeur avait circulé au moins 20 minutes, ils étaient jetés dans le calorimètre, la vapeur continuant à passer.

A titre d'exemple, je communique les détails d'une des expériences avec le

fil d'acier.

28 mars 1881.

Calorimètre avec eau	95,279	grammes
Calorimètre	16,101	„
	79,878	grammes
Correction pour la réduction au vide . . .	85	„
Equivalent en eau du calorimètre	2,057	„
Equivalent en eau	82,020	grammes.

12,462 grammes d'acier à la température de 100°,2, introduits dans le calorimètre, dont la température était de 11°,55, déterminèrent une déviation de 21,3 divisions de l'échelle.

Une différence de température de 1° produisait une déviation de 13,96 divisions de l'échelle; on avait donc

$$\frac{21,3}{13,96} \text{ pour l'accroissement de température.}$$

Trois autres jours, on trouva

$$c = 0,1139 \ (\tfrac{1}{2} \text{ poids})$$
$$0,1131$$
$$0,1120$$

$$c = 0,1130 \text{ fil d'acier.}$$
$$\text{et } c = 0,1133.$$

Pour le maillechort, on obtint

$$c = 0,09611$$
$$09624$$
$$09626$$
$$09621$$

$$c = 0,0962 \text{ fil de maillechort.}$$

IV. Calcul de l'équivalent mécanique de la chaleur.

Pour rechercher jusqu'à quel point la théorie mécanique de la chaleur rend compte des variations de température trouvées, nous calculerons, à l'aide de la formule de Thomson, l'équivalent mécanique.

$$\vartheta = -\frac{(273+\tau).\alpha.P}{A.w.c}$$

a. D'après les expériences avec le fil d'acier.

$$\vartheta = 0°,1047 \text{ C.}$$
$$\tau = 17°,0$$
$$\alpha = 0,00001156$$
$$P = 21,715 \text{ kilogr.}$$

300 mm. pesaient 4,2159 grammes, donc:

$$w = 0,014053 \text{ kilogr.}$$
$$c = 0,1130;$$

d'où

$$A = 437,8.$$

b. D'après les expériences avec le fil de maillechort.

$$\vartheta = 0°,1405 \text{ C.}$$
$$\tau = 16°,2 \text{ C.}$$
$$\alpha = 0,00001734$$
$$P = 17,134 \text{ kilogr.}$$

263,25 mm. pesaient 3,909 grammes, donc:

$$w = 0,014849 \text{ kilogr.}$$
$$c = 0,0962;$$

d'où

$$A = 428,1.$$

Les expériences de M. Edlund ayant montré que le *rapport* des variations de température chez des fils métalliques différents est reproduit par la formule de Thomson, il suffisait de s'assurer pour un seul métal si la valeur *absolue* peut également être calculée d'après cette formule.

Je crois que les expériences ci-dessus, tant avec le fil d'acier qu'avec le fil de maillechort, tranchent la question dans le sens affirmatif et autorisent par conséquent cette conclusion :

La théorie mécanique de la chaleur rend parfaitement compte des variations de température résultant de la tension et du relâchement des fils métalliques.

Je remplis un agréable devoir en remerciant ici M. Bosscha, directeur de l'Ecole polytechnique, tant pour son empressement à me donner accès au cabinet de physique, que pour l'intérêt témoigné à mes recherches, — ainsi que M. van de Sande Bakhuyzen, directeur de l'Observatoire astronomique de Leyde, qui a bien voulu mettre à ma disposition les deux microscopes de lecture pour la détermination des coefficients de dilatation.

Delft, octobre 1881.

QUELQUES REMARQUES SUR LE MÉCANISME DE L'ARTICULATION DU COUDE,

PAR

W. EINTHOVEN.

I.

La pronation et la supination de la main peuvent s'accomplir, comme on sait, le *cubitus restant fixe*. Ordinairement, toutefois, nous opérons ces mouvements de telle sorte que le *cubitus* aussi *se meut* manifestement. Pour mettre cette rotation en évidence, on n'a qu'à introduire le poignet dans un anneau fixe, ou à le serrer entre le pouce et le doigt médian de l'autre main, puis à exécuter les mouvements de pronation et de supination.

M. Lecomte [1]) a cherché à expliquer cette rotation de la main par un mouvement *spécial* du cubitus dans l'articulation huméro-cubitale. Une mention détaillée de cette explication a été faite, par M. van Braam Hoekgeest, dans la nouvelle édition du traité d'anatomie de M. Fles. On verra toutefois plus loin que l'argumentation de M. Lecomte n'est pas concluante, vu qu'elle repose sur une hypothèse inexacte, celle de l'immobilité de l'humérus durant la rotation.

J'essaierai ici d'expliquer la rotation de la main par une combinaison de mouvements s'exécutant dans des mécanismes articulaires simples et *connus*. Je montrerai ensuite comment, sans mécanisme spécial dans l'articulation du coude, l'avant-bras s'allonge ou se raccourcit pendant cette rotation. Enfin, je

[1]) „Le coude et la rotation de la main", par le Dr. O. Lecomte, dans: *Archives générales de médecine*, août 1874, et mai et juin 1877.

dirai quelques mots de l'action d'un des nombreux muscles de l'avant-bras, le carré pronateur.

Mais, avant tout, je dois mentionner que M. Koster [1]) a déjà contesté les assertions de M. Lecomte. Il a signalé un mouvement latéral du cubitus dans l'articulation huméro-cubitale, mouvement qui paraissait rendre superflues les considérations auxquelles M. Lecomte avait eu recours. On peut se demander, toutefois, si ce mouvement latéral suffit à expliquer comment la main, dans toutes les positions de l'avant-bras, peut tourner autour d'un axe quelconque. Quant à déterminer quelle part de la rotation doit être attribuée à ce mouvement latéral, et quelle autre au mouvement de l'humérus, cela serait assez difficile et n'est d'ailleurs pas essentiel pour l'intelligence du mécanisme de l'articulation du coude.

II.

Pour expliquer comment la rotation de la main, dans l'anneau fixe, est possible à l'aide du mouvement de l'humérus, nous commencerons par décrire exactement une rotation de 90°. La fig. 1 (Pl. VII), représente la coupe transversale du poignet, environ au niveau des extrémités du radius et du cubitus. Figurons-nous le corps dans l'attitude verticale, le bras appliqué contre la paroi du thorax, l'avant-bras fléchi d'environ 90°, la main en supination (position *A*). *A F C G* est la tête du cubitus, *C E* l'épiphyse du radius, et toutes les deux sont embrassées par l'anneau de Lecomte, *A L E O*. Le point *B* est le centre de la tête du cubitus, *M* le centre du poignet et par conséquent aussi de l'anneau de Lecomte.

Si l'on fait exécuter à la main une demi-pronation, le cubitus restant fixe, l'extrémité du radius, qui occupe la position *C E*, tournera autour de *B*, jusqu'à ce qu'elle soit arrivée dans la position *F E*'. Le centre du poignet, et par conséquent de l'anneau, *M*, se trouvait, à l'origine, sur la ligne horizontale

[1]) *Weekblad van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde*, 1880, p. 213.

A E. Maintenant, le centre M^1 se trouve sur la ligne horizontale *H K*, de sorte que, dans une pareille demi-pronation, l'anneau de Lecomte est déplacé à une distance $B M^1$ vers le haut [1]). Mais le centre *M* était aussi situé, à l'origine, sur la verticale *L O*, tandis que maintenant le centre M^1 tombe sur la verticale $G E^1$; il est donc évident que, par l'effet de la demi-pronation, l'anneau de Lecomte se trouve porté de *A L E O* en $G H E^1 K$, c'est-à-dire, que, outre le chemin $B M^1$ vers le haut, il parcourt aussi un chemin égal *B M* de dehors en dedans.

Si, au contraire, le cubitus ne reste pas en place lors de la demi-pronation, mais qu'une combinaison de mouvements puisse avoir lieu, et si l'anneau est maintenu fixe, de manière que la main soit obligée d'opérer une rotation, la tête du cubitus devra exécuter un mouvement opposé au mouvement circulaire de l'extrémité du radius; elle devra, s'écartant d'une distance $B M^1$ vers le bas et d'une distance égale *B M* latéralement, se porter de *B* en B^1. Le mouvement vers le bas est possible dans l'articulation huméro-cubitale (extension de l'avant-bras), le mouvement latéral, par une légère rotation de l'humérus autour de son axe longitudinal. Le radius devra suivre le cubitus dans ses mouvements, avec ce résultat que son extrémité ne viendra plus se placer dans la position $F E^1$, mais dans la position *P L*. Pendant la rotation, l'arc *A G* de la tête du cubitus glisse le long de l'arc *A O* de l'anneau, de sorte que *G* vient tomber en *O*; et le point *E* du radius glisse sur l'arc *E L* de l'anneau, de façon que *E* vient coïncider avec *L*. Dans notre figure, nous avons laissé la coupe *A C E* se déplacer dans le même plan frontal. En réalité, il en est un peu autrement, mais cela n'a pas d'influence sensible sur notre explication. La face terminale du radius est à peu près perpendiculaire à son axe de rotation, ce qui fait que dans la position *A* elle est verticale et que, lors de la pronation et de la supination, elle se meut à peu près dans le même plan, lequel toutefois, en raison de

[1]) Les directions des mouvements sont données relativement à la position *A*.

la position de la tête du radius, est déplacé, parallèlement à lui-même, en arrière. Ce plan fait un angle avec le plan frontal, attendu que l'axe de rotation n'a pas la direction sagittale, mais passe par les centres de la tête du cubitus et de la tête du radius [1]). En outre, les mouvements latéraux et ascendants ou descendants de la tête du cubitus ne s'opèrent pas suivant des lignes droites, mais suivant des arcs de cercle ayant pour centre l'articulation du coude.

Après avoir indiqué les mouvements *possibles* de l'avant-bras, nous allons en montrer la nécessité. Remarquons que les trois genres de mouvements, — pronation et supination de la main, flexion et extension de l'avant-bras, rotation de l'humérus, — sont indépendants l'un de l'autre, et que, dans ce que nous savons des muscles auxquels ces mouvements sont dus, il n'y a rien qui s'oppose à ce que nous nous les représentions unis en une combinaison quelconque. Dès lors, il paraît extrêmement probable qu'une pareille combinaison s'opère réellement. Et si nous considérons qu'on est bien maître de l'effet de l'action musculaire, mais non du choix des muscles par lesquels cet effet sera produit, que par conséquent, au moindre effort, on est probablement obligé de laisser concourir tous les muscles qui peuvent tant soit peu favoriser l'effet, — nous serons très tentés de conclure, tout en admettant avec M. Koster le mouvement latéral du cubitus dans l'articulation du coude, que, lorsqu'il s'agit de déployer une certaine force, les muscles rotateurs de l'humérus doivent contribuer à faire atteindre le but, que l'humérus *doit* exécuter une rotation. Effectivement, il n'est pas difficile de rendre le fait sensible. Qu'on pose le bras à plat sur une table, l'avant-bras faisant avec lui un angle de 90° et étant dirigé verticalement; qu'on glisse ensuite sous les deux

[1]) Il serait peut-être très intéressant de connaître le mouvement *exact* de la face terminale du radius et les conséquences qui doivent en résulter pour l'ensemble de l'articulation de la main. Mais l'examen de cette question nous mènerait trop loin, de sorte que je dois me résigner ici à faire un usage répété du mot „à peu près".

épicondyles de l'humérus quelques feuillets de papier ou un livre mince, laissant tout juste l'espace nécessaire pour qu'on puisse encore placer sous chaque épicondyle un doigt, qui se trouve alors serré entre l'épicondyle et le livre. Les choses ainsi disposées, on fera d'abord tourner l'humérus autour de son axe longitudinal, sans combinaison avec d'autres mouvements, de manière que le poignet entier se porte alternativement à droite et à gauche, et que l'amplitude de ses oscillations soit à peu près égale à sa largeur. On percevra alors très distinctement le mouvement ascendant et descendant des deux épicondyles, surtout celui de l'épicondyle interne. Si ensuite on maintient immobile l'anneau de Lecomte et qu'on exécute la rotation de la main, on observera dans les épicondyles un mouvement ascendant et descendant à peu près de même étendue que précédemment; mais si le cubitus est maintenu fixe autant que possible, et qu'on opère la pronation et la supination de la main, les mouvements susdits ne se produiront pas.

Dans ce qui précède, nous nous sommes occupés de la rotation principale de la main, celle qui a lieu autour d'un axe passant par le milieu du poignet; il me reste à montrer brièvement comment, tout à fait suivant les mêmes principes de mouvement, le poignet peut tourner autour d'un autre axe quelconque. La fig. 2, qui représente ce cas, n'a presque pas besoin d'explication. M est un point arbitrairement choisi sur la ligne $A\,D$. Autour de M comme centre, le poignet tourne de telle sorte que 1° la tête du cubitus est portée de B en B^1, l'arc $A\,C$ de cette tête se mouvant le long de l'arc $A\,C^1$, et A venant se placer en A^1, C en C^1; et que 2° l'extrémité du radius est portée de $E\,D$ en $E^1\,D^1$, le point D se mouvant suivant l'arc $D\,D^1$ jusqu'en D^1, et le point E suivant l'arc $E\,E^1$ jusqu'en E^1. Nous nous représentons l'axe, autour duquel le poignet tourne, comme complètement déterminé par la combinaison des deux mouvements: *flexion* ou *extension de l'avant-bras* et *rotation de l'humérus;* et puisque ces mouvements peuvent être combinés d'une infinité de manières, le nombre des axes est également infini.

III.

S'il est facile d'expliquer la rotation de la main par la disposition connue de quelques articulations simples, il est non moins aisé de montrer que l'avant-bras, — sans aucun changement dans la position du cubitus par rapport à l'humérus, — se raccourcit pendant la rotation de dehors en dedans, et s'allonge pendant la rotation de dedans en dehors. M. Lecomte a attiré l'attention sur le fait que c'est aussi avec le premier de ces mouvements que nous desserrons une vis et l'attirons à nous, avec le second, que nous la serrons et l'éloignons de nous.

Dans la fig. 3, $A\,B\,C\,D$ représente une coupe horizontale (position A) de l'avant-bras. Le cubitus est figuré par $B\,D$, le radius par $A\,C$, et l'humérus par $A\,B$, de sorte que la longueur de l'avant-bras est indiquée par $H\,K$. Lorsque la main a exécuté une rotation de 180°, l'humérus a tourné de $A\,B$ en $E\,F$. Le cubitus a conservé sa position par rapport à l'humérus, — pour simplifier, nous les avons représentés perpendiculaires l'un à l'autre, — et s'est déplacé de $B\,D$ en $F\,C$ (on voit facilement, sur la figure, pourquoi $C\,F = C\,A = D\,B$). Le radius s'est porté de $A\,C$ en $E\,G$ (pour la construction de $E\,G$, nous avons, de E comme centre, avec $A\,C$ pour rayon, décrit un arc de cercle, qui coupe $B\,D$ en G), de sorte que, après la rotation, l'avant-bras est représenté par $E\,F\,C\,G$, et sa longueur, qui a diminué d'une quantité $K\,L$, à cause du croisement des deux os de l'avant-bras, par $H\,L$. Le raccourcissement est toutefois un peu moindre, parce que la tête du radius n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation (voir p. 292).

IV.

Pour celui qui lit les articles de M. Lecomte, il est évident que dans ses expériences l'humérus n'a jamais été immobile. Son explication du mécanisme de la pronation et de la supination est donc inexacte et je puis me dispenser de réfuter ses idées au sujet de l'action musculaire, idées qui s'éloignent tout à fait de la doctrine généralement admise. Fortuitement, toutefois, l'opinion

de M. Lecomte concernant le muscle carré pronateur (suivant lui, un supinateur du cubitus) s'accorde avec une vue émise par des anatomistes célèbres [1]), et d'après laquelle l'enroulement de ce muscle *autour du cubitus* ferait effectivement songer plutôt à la fonction de supinateur. Je tâcherai donc de montrer brièvement que la situation occupée par le muscle est la seule qui puisse donner lieu à une pronation complète du radius.

Dans la fig. 4, qui doit représenter la coupe transversale de l'avant-bras, un peu en arrière des épiphyses des deux os fistuleux, CD indique le cubitus, EF le radius. Supposons, provisoirement, que l'axe autour duquel tourne le radius passe exactement par le centre A de la coupe du cubitus. Après une demi-pronation, EF se trouve dans la position $E^1 F^1$, et après une pronation entière, dans la position $E^2 F^2$. Remarquons que le muscle est d'abord étendu suivant $KCHG$, puis suivant KCG^1, et finalement de K en G^2. Il se raccourcit donc de HCK. La quantité du raccourcissement, multipliée par la force de la contraction, donne le travail exécuté. Si l'on désigne AH par r et la force avec laquelle le muscle se contracte par P, le travail exécuté est $= P r \pi$.

Ce résultat est entièrement d'accord avec celui que nous obtenons en décomposant la force. Soit $GL = P$, GM est alors la composante dont il faut tenir compte. Désignons-la par p et l'angle LGA par α, et remarquons que α a dans toutes les positions la même grandeur, de sorte que p aussi conserve toujours une valeur égale. En désignant AG par a, le travail exécuté dans une pronation entière est $= p a \pi$. Mais on a

$p = P \sin \alpha$ et $a = \dfrac{r}{\sin \alpha}$, donc $p a \pi = P r \pi$.

Nous avons fondé ces considérations et ce calcul sur la supposition que le radius EF tournait autour du centre A du cubitus CD (fig. 4). En réalité, cela n'est pas le cas. Le carré pronateur s'étend sur une hauteur déterminée, commençant aux

---

[1]) *Lehrbuch der Anatomie des Menschen von* Hyrtl, 1881, p. 492.

épiphyses et finissant à environ ¾ de décimetre au-dessus. Juste aux faces terminales des épiphyses, le radius tourne autour du centre de la tête du cubitus; mais, un peu plus haut, le centre de rotation se porte de plus en plus vers le côté et vers le haut. Les fig. 5, 6 et 7 représentent le mouvement du radius autour d'un centre situé respectivement à l'intérieur, à la périphérie et à l'extérieur du cubitus. Pour la commodité, le radius a été figuré par un cercle dans les fig. 6 et 7.

En ce qui concerne l'influence d'un pareil déplacement du centre de rotation, nous remarquerons que, lors d'une rotation de 360°, (théoriquement) le radius ne s'entoure d'aucune partie du muscle, tandis que le cubitus en reçoit un tour entier. Dans une semblable rotation, le travail total du muscle reste donc, — que le centre de rotation soit situé au centre du cubitus ou en dehors, — toujours le même. Mais, dans ce dernier cas, la composante de la force n'a plus la même valeur pour toutes les positions.

Dans la fig. 5, où le centre de rotation se trouve encore en dedans de la périphérie du cubitus, la composante, bien que variable, est toujours positive. Sa valeur est déterminée par les angles α, β, etc.

Dans la fig. 6, où le centre de rotation tombe juste *sur* la périphérie, il y a une position, B^3, — lorsque le contact du muscle avec le cubitus A se fait exactement au point de rotation M, — pour laquelle la composante est $= 0$. Pour toutes les autres positions, elle est positive.

Dans la fig. 7, où le centre de rotation M est situé en dehors de la périphérie, nous trouvons deux positions B^3 et B^5, — lorsque la portion rectiligne du muscle, ou bien son prolongement, passe par le centre de rotation, — pour lesquelles la composante est $= 0$. Durant le trajet de B^5 à B^3, en passant par B^1 et B^2, elle est positive, mais dans le trajet de B^3 à B^5, par B^6, elle a une valeur négative.

Tant que la composante est positive, le muscle agit dans le sens de la pronation. Quand elle est nulle, le muscle ne peut

produire aucun mouvement. Et lorsqu'elle est négative, il fonctionne dans le sens de la supination. Tout cela résulte clairement des figures et n'a pas besoin d'être appuyé de plus de détails.

Nous devons observer en outre, que maintenant, dans certaines positions, le muscle s'enroule bien dûment, quoique dans une faible mesure, autour du radius. L'enroulement est représenté dans la fig. 5 par les angles $K G^2 N$ et $H G^4 P$, dans la fig. 6 par les angles $G^1 B^1 P$, etc., dans la fig. 7 par les angles $G^1 B^1 P$, etc.

On peut encore se demander dans quelles conditions l'enroulement se fait autour du radius, au lieu de se faire autour du cubitus. C'est lorsque le radius, bien que tournant autour d'un axe, reste constamment au même côté du cubitus. La fig. 8 sert à éclaircir ce point. Le cercle A y représente le cubitus, les cercles B, B^1, etc. le radius dans ses différentes positions.

Nous rencontrons ici de nouveau deux positions, B^3 et B^5, dans lesquelles la composante est $= 0$. La partie rectiligne du muscle, $G^5 D$ ou $G^3 D$, ou bien son prolongement, passe alors aussi par le centre de rotation M. Pendant le trajet de B^5 à B^3, par B, B^1 et B^2, la composante est positive, pendant le reste du parcours, négative.

Un mouvement de ce genre serait produit s'il y avait un carré pronateur situé plus près de la tête du radius que de la tête du cubitus.

Les considérations que je viens de présenter sur le mécanisme de la pronation et de la supination ont reçu un accueil favorable de M. le professeur Koster, mon maître respecté, qui a bien voulu m'aider aussi de ses précieux conseils pour la rédaction de cet article. Je lui en témoigne ici ma sincère reconnaissance.

UTRECHT, juin 1882.

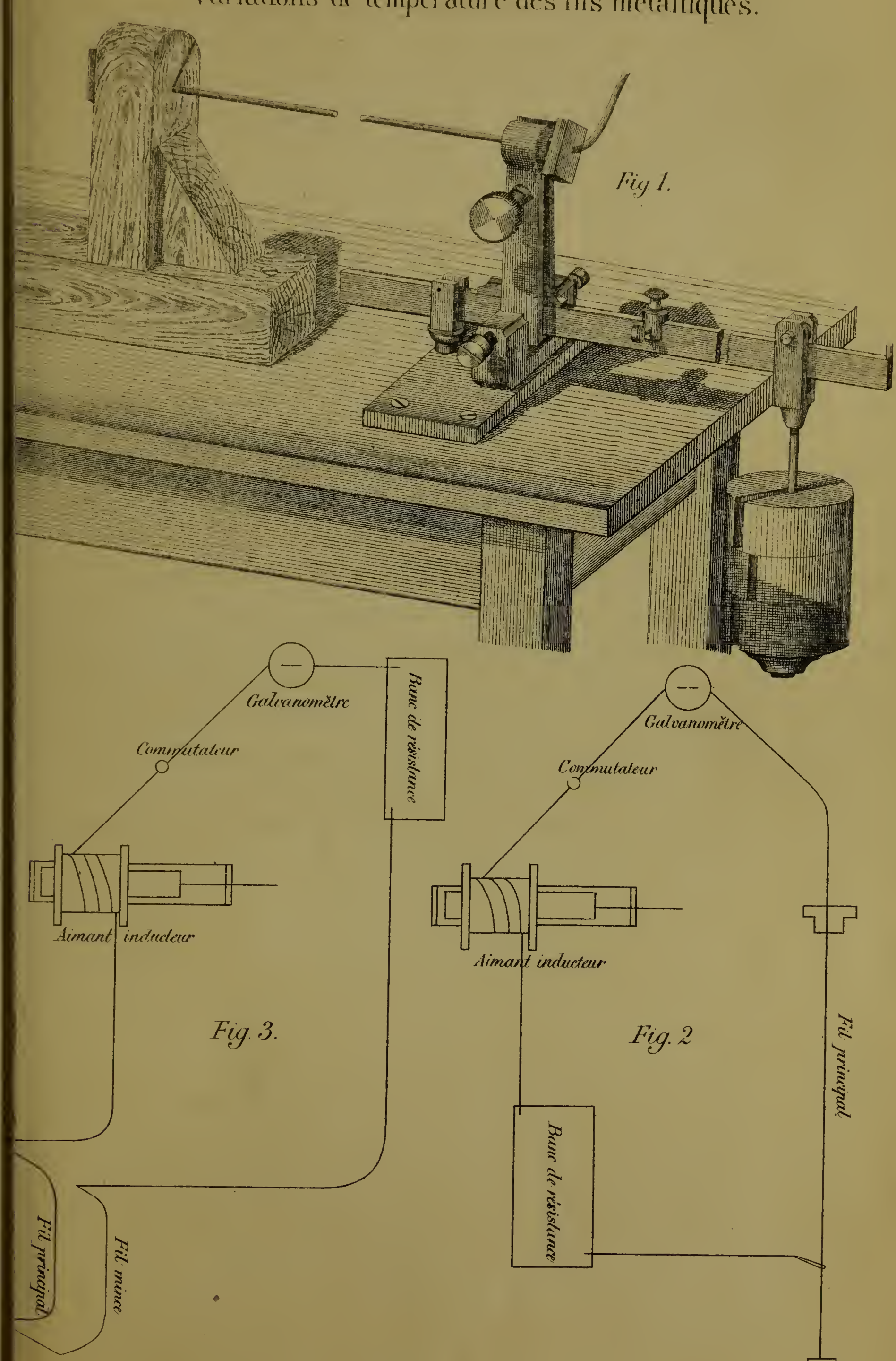
Cet article était écrit depuis longtemps, quand parut, dans

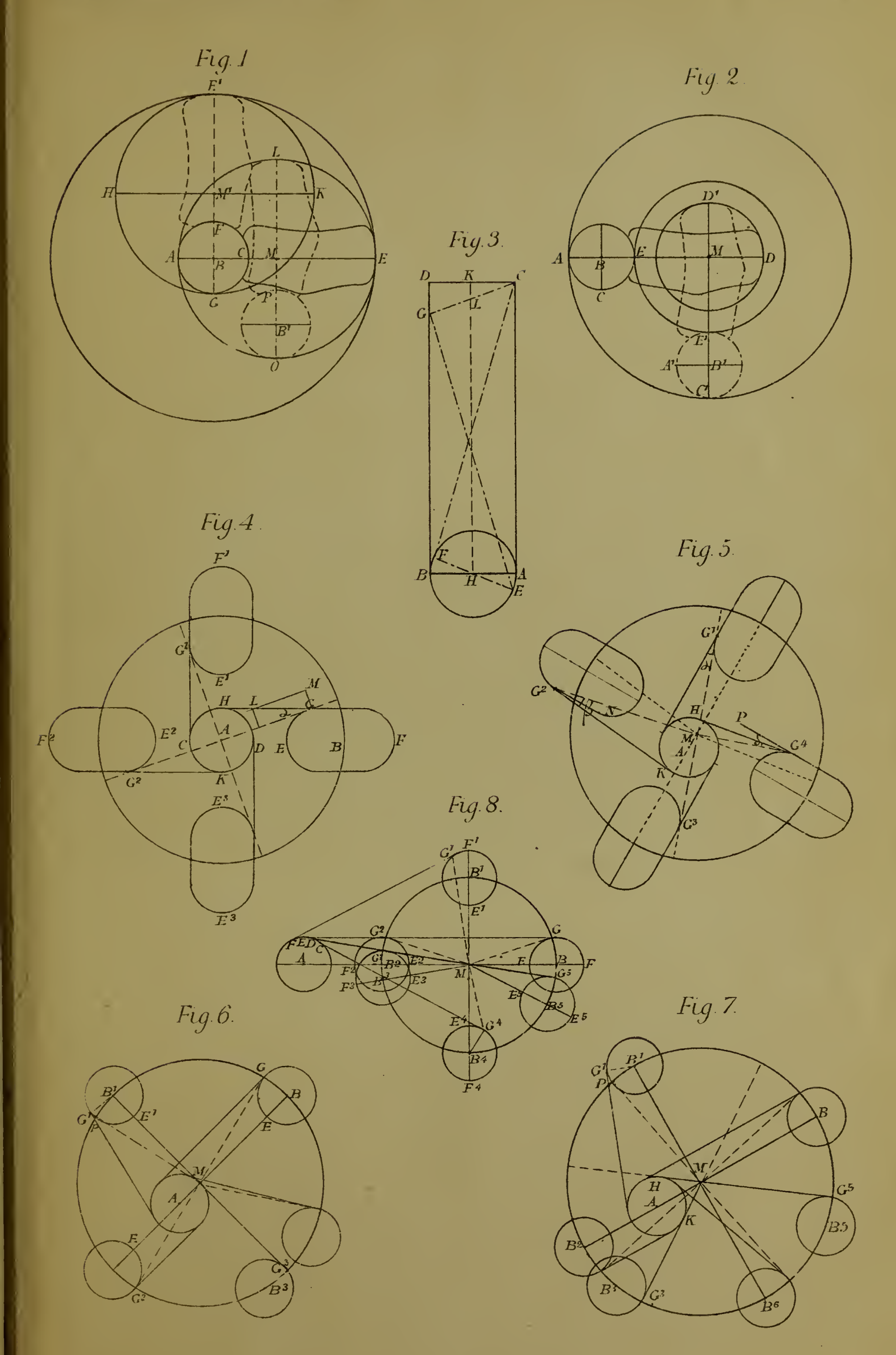
l'„*Archif für Anatomie und Physiologie von* His, Braune *und* Du Bois-Reymond, *Anatom. Abtheil.*, 1882, p. 169", le compte rendu des recherches de MM. Braune et Flügel sur le mécanisme de la pronation et de la supination. Je prends la liberté de faire remarquer ici, en passant, que ces observateurs n'ont pas eu une idée nette de la combinaison de la rotation de l'humérus avec celle du radius autour du cubitus. Cela ressort surtout de ce qui est dit p. 172: „*Die rechtwinklige Beugestellung im Elbogengelenke wurde dem Arm gegeben*, *um etwaige Rotationen des Humerus auszuschliessen*". Comme si, lorsque l'avant-bras est fléchi à angle droit, l'humérus ne pouvait pas tourner sur lui-même, synergiquement avec la pronation ou la supination dans l'articulation du coude!

Plus loin, MM. Braune et Flügel disent bien qu'ils ont fixé le bras (encore attaché au cadavre) sur une table au moyen de vis, mais je doute fort que, même ainsi, ils aient complètement empêché la rotation de l'humérus autour de son axe longitudinal. Un bras détaché du cadavre, mais encore couvert des muscles et des téguments, ayant été fixé par moi dans un étau, j'ai vu, nonobstant cela, l'humérus se mouvoir quand je faisais exécuter aux os de l'avant-bras la pronation ou la supination. On ne peut rendre l'humérus absolument immobile qu'en serrant dans l'étau l'os lui-même, dépouillé des muscles.

Même en opérant ainsi, l'expérience de Lecomte, avec l'anneau autour du poignet, n'en réussit pas moins, comme l'ont trouvé également MM. Braune et Flügel. Il *doit* donc y avoir alors participation du cubitus au mouvement. C'est effectivement ce qu'admettent MM. Braune et Flügel; mais leur „*Schlottern*" de l'articulation huméro-cubitale et leurs „*Hebelbewegungen*" du cubitus ne sont autre chose que l'expression imparfaite du „mouvement latéral" du cubitus (combiné avec des mouvements de flexion et d'extension dans l'articulation huméro-cubitale), que M. Koster avait déjà décrit, beaucoup plus clairement, il y a deux ans.

Variations de temperature des fils metalliques.




Fig. 1
E' L H M' K F A B C M E G T B' O
Fig. 2
D' A B E M D C E' A' B' C'
Fig. 3
D K C G L B H A E F
Fig. 4
F' G' E' M H L C F² E² C A D E B F G² K E³ E³
Fig. 5
G' G² H P M A G⁴ K G³
Fig. 8
G' F' B' E' G² G F E D C A G¹ B² E² E B F F² B³ E³ M G⁵ F³ E⁵ B⁵ E⁵ E⁴ G⁴ B⁴ F⁴
Fig. 6
G B' B G' E' E M A E G³ B³ G²
Fig. 7
B' G' P B M H A K G⁵ B² B5 B³ G³ B⁶

TOME XVII. 4me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1882.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE

ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

SUR LA

VALEUR DE LA PRESSION NÉGATIVE INTRATHORACIQUE PENDANT LA RESPIRATION NORMALE,

PAR

A. HEYNSIUS.

C'est un des grands mérites de M. Donders d'avoir le premier mis nettement en lumière l'importance de l'élasticité du tissu pulmonaire pour le mouvement veineux du sang [1]).

Après avoir fixé un manomètre dans la trachée d'un cadavre, il ouvrit le thorax. Le manomètre indique alors une pression positive, et M. Donders en conclut que la hauteur à laquelle le manomètre s'élève dans ces conditions donne la mesure de la pression négative dans le thorax, ou de l'aspiration du thorax, pendant la période d'expiration. En effet, lorsque toute action musculaire est exclue, la pression sur la face pleurale des poumons et sur les organes qui, en dehors des poumons, sont situés dans le thorax, doit être la pression atmosphérique dimi-

[1]) *Bydrage tot het mechanisme van ademhaling en bloedsomloop*, dans *Ned. Lancet*, 2e série, 5e année, 1849—50. La traduction allemande n'a paru qu'en 1853, dans le *Zeitschrift für rationelle Medicin*, t. III, p. 287.

nuée de l'élasticité des poumons, et cette élasticité est déterminée par la hauteur à laquelle monte le manomètre quand on ouvre le thorax.

M. Donders trouva pour cette pression manométrique chez l'homme 30 à 70 mm. d'eau, mais, dans les onze cadavres sur lesquels il expérimenta, les poumons présentaient toujours quelque affection pathologique (adhésions, etc.), de sorte qu'il supposa que, dans les poumons sains, la valeur de la pression manométrique surpasserait encore le maximum trouvé par lui. „Provisoirement", ainsi conclut-il, „je crois donc pouvoir fixer la force élastique des poumons sains, après une expiration ordinaire, à environ 80 mm. d'eau".

Cette valeur croît considérablement aussitôt que les poumons sont dilatés par l'inspiration et que les fibres élastiques acquièrent ainsi une tension plus forte. Pour le prouver, M. Donders fixa à la trachée d'un cadavre une pièce en T, dont l'un des bras était relié à un manomètre, l'autre à une seringue double de Weiss. A mesure qu'il introduisait de l'air au moyen de la seringue, le manomètre montait, et lorsque les poumons étaient fortement distendus, la différence de niveau du manomètre pouvait s'élever chez l'homme jusqu'à 18 mm. de mercure, équivalant à 240 mm. d'eau, et, chez le lapin, même jusqu'à 21 mm. de mercure.

Conformément aux idées alors régnantes, M. Donders croyait que la force avec laquelle les poumons tâchent d'expulser l'air devait, à raison de la tonicité, être encore plus grande durant la vie qu'après la mort. „A l'élasticité des poumons, due à une propriété physique des fibres élastiques, s'ajoute alors", écrivait M. Donders, „la tonicité, qui dépend de l'état de tension des fibres contractiles (tissu musculaire organique) sous l'influence du système nerveux".

Peut-on mesurer la tonicité, de même qu'on mesure l'élasticité? Directement chez l'homme, cela n'était pas possible. M. Donders expérimenta donc sur des lapins, des chats et des moutons. Chez l'animal vivant, le manomètre fut fixé dans la trachée, de sorte que l'air ne pouvait plus ni entrer, ni sortir. Sous la

menace d'asphyxie, les efforts respiratoires devenaient d'abord de plus en plus énergiques, et, au moment de l'effort le plus violent, M. Donders constatait une pression négative de 40 à 60 mm. de mercure, quelquefois encore plus forte. Bientôt, la respiration s'arrêtait. A ce moment, le mercure occupait en général le même niveau aux deux côtés. Si alors le thorax était immédiatement ouvert, le manomètre indiquait une pression positive de 5—9 mm. de mercure, — plus haute chez le mouton que chez le lapin. Mais, une demi-heure était à peine écoulée, que le mercure avait baissé d'environ ¼.

M. Donders attribua cet abaissement de ¼ à la disparition de la tonicité, et le phénomène que les poumons, après l'ouverture du thorax, chez l'animal vivant, se réduisent à un volume plus petit, fut également mis par lui sur le compte du tonus. Mais il n'entendait pas qu'une trop grande valeur fût attachée à ce chiffre de ¼, les résultats des expériences faites de différentes manières (après asphyxie, après hémorrhagie, après section de la moelle allongée) ayant offert des divergences assez fortes.

D'après ces expériences, M. Donders estima la valeur de la force d'aspiration du thorax, dans la respiration paisible, à 7½ mm. *Hg* pour l'expiration, et à 9 mm. pour l'inspiration. „En ajoutant", dit-il (*l. c.*, p. 342), „aux 80 mm. d'eau que nous avons admis pour la force élastique des poumons humains, un quart, c'est-à-dire 20 mm., pour la tonicité, nous obtenons 100 mm. d'eau, ou près de 7½ mm. de mercure, pour la résistance des poumons vivants après l'accomplissement d'une expiration ordinaire. Lors d'une inspiration ordinaire, cette résistance croîtra bien jusqu'à 9 mm., et elle atteint indubitablement au moins 30 mm. *Hg* dans une inspiration aussi profonde que possible".

Depuis les recherches de M. Donders, il s'est écoulé plus de trente ans, circonstance qui ne doit pas être perdue de vue quand on veut apprécier ses expériences. Jugées d'après les exigences du temps présent, ses déterminations quantitatives laissent à désirer, et ce défaut frappe d'autant plus, lorsqu'on

examine la question en détail, qu'insensiblement on en est arrivé à attacher à ces déterminations, sous le rapport *quantitatif*, plus de valeur que M. Donders lui-même ne leur en avait reconnue. A lire les divers Cours de physiologie, on croirait que les chiffres de 7½ mm. *Hg* pour l'expiration et de 9 mm. *Hg* pour l'inspiration reposassent réellement sur des déterminations satisfaisantes, et que la différence de 1½ mm. *Hg* entre l'inspiration et l'expiration ordinaires, paisibles, fût établie d'une manière suffisamment certaine.

Or, il ressort de ce qui précède, qu'il n'en est pas ainsi. Pour ne rien dire de la tonicité des fibres musculaires organiques, qui, comme l'a montré entre autres M. Gerlach, n'exerce aucune influence sensible sur le volume des poumons, le Mémoire de M. Donders ne renferme aucune détermination sur laquelle repose le chiffre de 9 mm. pour l'inspiration ordinaire. M. Donders insufflait les poumons avec une seringue double de Weiss, qui à chaque soulèvement et abaissement du piston déplaçait exactement 100 c.c. d'air. Probablement, le chiffre de 9 mm. a été obtenu par M. Donders après qu'il eut insufflé une quantité d'air correspondant, au juger, à la capacité respiratoire ordinaire. Mais, à cet égard, le Mémoire ne nous apprend rien.

En ce qui concerne le volume d'air déplacé dans la respiration ordinaire, paisible, les opinions, en 1850, divergeaient beaucoup. Nulle part, chez M. Donders, on ne trouve une indication de la valeur qu'il a adoptée pour ce volume et on ne peut donc pas même conjecturer combien d'air environ avait été insufflé dans les poumons lorsque le nombre moyen de 9 mm. *Hg* était obtenu pour leur élasticité.

Si je ne me trompe, l'incertitude qui régnait en 1850 au sujet de la capacité respiratoire normale est la première cause pour laquelle le Mémoire de M. Donders ne contient pas de chiffres dont on puisse déduire la valeur de la pression négative durant l'inspiration; mais, en second lieu, les déterminations de l'élasticité des poumons à différents degrés d'expansion doivent avoir fourni à M. Donders, vu la méthode suivie par lui —

insufflation d'air dans la trachée — des résultats assez variables, et pour cette raison aussi il n'aura pas attaché une grande valeur aux chiffres qu'il donnait pour la force d'aspiration dans l'inspiration et l'expiration normales. Lui-même ne les regardait pas comme suffisants: „*provisoirement*, toutefois, il crut pouvoir en déduire que, dans une inspiration ordinaire, l'élasticité croîtrait bien jusqu'à 9 mm., donc de 1½ mm. *Hg*".

Pour le principe que M. Donders voulait mettre en lumière, la détermination précise de la différence d'élasticité dans l'inspiration et l'expiration ordinaires n'était pas une condition de rigueur; aussi, quant aux points essentiels, les conséquences que M. Donders tira de ses expériences sont-elles encore vraies aujourd'hui. Il conclut justement: 1° que dans la respiration ordinaire et paisible, où l'expiration se fait passivement, sans action musculaire, en vertu de l'élasticité des poumons, la face pleurale des poumons et tous les organes situés en dehors d'eux, dans le thorax, se trouvent sous une pression moindre que celle de l'atmosphère, la différence étant précisément égale à l'élasticité des poumons; 2° que par suite, dans la respiration paisible, le sang est incessamment aspiré vers le thorax, et que cette aspiration profite surtout à la circulation veineuse; 3° que l'élasticité des poumons augmente lors de l'inspiration, et que par conséquent la force de l'aspiration des poumons est plus grande pendant l'inspiration que pendant l'expiration.

Mais dès qu'il s'agit d'appliquer l'influence de cette force d'aspiration *in concreto*, à des phénomènes particuliers, le besoin de déterminations plus exactes, surtout en ce qui concerne la *différence* de pression durant l'inspiration et l'expiration, se fait sentir. C'est ce que j'ai pu reconnaître, mieux que précédemment, à l'occasion des recherches exécutées par M. de Jager, au Laboratoire physiologique de Leyde, sur le mouvement du sang dans les poumons. La vitesse du courant sanguin dans l'état d'expansion des poumons, lorsque cet état avait été amené par une diminution de pression sur leur face pleurale, donc par aspiration, fut trouvée plus grande que dans l'état d'affaissement.

Mais la valeur de l'aspiration par laquelle on produisait l'expansion pulmonaire était, dans les expériences de M. de Jager, ordinairement plus grande que 1½ mm. Les résultats observés en dehors de l'organisme vivant, à cette pression négative plus forte, peuvent-ils être appliqués aux phénomènes qui se manifestent durant la vie? La connaissance exacte des rapports quantitatifs à l'état de vie est, on le voit, indispensable pour la solution de cette question.

A l'origine, j'avais cru qu'il serait assez facile de parvenir au but: les recherches de M. Donders paraissaient avoir simplement besoin d'être complétées, en ce sens, qu'on exécuterait les déterminations nécessaires de l'élasticité des poumons à différents degrés d'expansion. De ces déterminations, combinées avec la capacité respiratoire normale, il semblait que la différence de pression dans l'inspiration et l'expiration normales se laisserait déduire immédiatement. Quant à la capacité respiratoire normale, on est assez bien tombé d'accord, depuis la publication du travail de M. Donders, qu'elle s'élève à environ 500 c.c. pour un homme de taille moyenne, et il a aussi été reconnu, comme nous l'avons déjà dit, que la tonicité n'a pas d'influence appréciable sur le volume d'air qui est contenu dans les poumons.

Il ne s'agissait donc, semblait-il, que de prendre un cadavre humain à poumons sains, et d'unir hermétiquement la trachée à une pièce en T, dans l'un des bras de laquelle serait fixé un manomètre. En fermant alors le second bras de cette pièce en T, et ouvrant le thorax, le niveau du manomètre indiquerait la force élastique du thorax pendant l'expiration; tandis que le niveau du manomètre après insufflation, par le second bras de la pièce en T, du volume normal d'air respiratoire (500 c.c.) ferait connaître cette force au moment de l'inspiration. Mais il suffit d'exécuter l'expérience une seule fois pour se convaincre que les résultats obtenus sont sans valeur. L'élasticité des poumons morts est très inconstante. Des quantités d'air égales, insufflées dans les poumons, conduisent chaque fois à des chiffres

différents et même très discordants entre eux. A cela, d'ailleurs, il n'y a rien d'étonnant. Bien que l'élasticité des poumons dépende essentiellement de la quantité de tissu élastique qu'ils contiennent, les autres éléments histologiques (tissu musculaire organique, tissu connectif, vaisseaux sanguins, etc.) exercent pourtant aussi une certaine influence. Les poumons morts s'affaissent beaucoup moins que les poumons vivants, et leur élasticité est beaucoup moins parfaite. Lorsque la force expansive a cessé d'agir, les tissus constitutifs des poumons morts ne reviennent plus à leur forme (longueur) primitive. Après chaque insufflation on a affaire, pour ainsi dire, à d'autres poumons, et il n'y a donc pas lieu d'être surpris que les chiffres trouvés pour la force élastique des poumons, aux mêmes degrés d'expansion, ne présentent aucun accord.

Il faut donc expérimenter sur les poumons ou bien pendant la vie, ou bien immédiatement après la mort, et, pour cette raison, la détermination de l'élasticité des poumons de l'homme n'est pas possible, ou ne l'est qu'exceptionnellement. M. Hutchinson a communiqué deux expériences dans lesquelles l'élasticité de poumons humains *sains* a été déterminée par lui, à différents degrés d'expansion [1]). Immédiatement après la mort des sujets, alors que la température du corps était encore de 97°,5 et 98°,5 Fahrenheit, il introduisit un manomètre dans la trachée et détermina, tout comme M. Donders, l'élasticité des poumons telle qu'elle est à l'ouverture du thorax, et après insufflation de différentes quantités d'air. L'une des deux expériences eut lieu sur les poumons d'une femme de 28 ans, mesurant 1,75 m. de hauteur. Malheureusement, dans cette expérience, le manomètre n'avait pas été bien fixé dans la trachée, de sorte qu'un peu d'air s'échappa au moment de l'ouverture du thorax. La détermination de l'élasticité avant

---

[1]) Todd, *Encyclopaedia of anat. and physiol.*, Art. *Thorax*, p. 1059, 1849—1852. Les déterminations de M. Hutchinson sont exprimées en mesures et poids anglais. Je les ai ramenées au système métrique.

l'insufflation d'air (14,7 mm. d'eau = 1 mm. *Hg* environ) n'a donc pas de valeur dans cette expérience. Après insufflation de 1640 c.c. d'air, la force élastique s'éleva à 137,5 mm. d'eau ou 10 mm. de mercure; après une nouvelle insufflation de 1640 c.c., à 254 mm. d'eau ou 18,8 mm. de mercure; enfin, après qu'on eut introduit encore 1476 c.c. d'air, elle fut trouvée égale à 508 mm. d'eau ou 37,6 mm. de mercure. La seconde expérience porta sur les poumons d'un homme de 29 ans, ayant une taille de 1,76 m. et un poids de 56 kilogrammes. De cette expérience de M. Hutchinson nous pourrions déduire toutes les relations quantitatives désirées, s'il avait procédé d'une manière plus systématique dans l'insufflation de l'air. L'élasticité des poumons, avant toute insufflation d'air, au degré d'expansion qu'ils possédaient dans le cadavre, équivalait ici à 61 mm. d'eau ou 4,5 mm. de mercure, tandis qu'après insufflation successive de 1476, 328 et 2870 c.c. d'air, on trouva respectivement 182, 207 et 431 mm. d'eau, ou 13,4, 15,3 et 31,9 mm. de mercure, pour la force élastique.

M. Hutchinson croyait qu'au moment de la mort *l'air* dit *de réserve* (l'air qui, après l'expiration ordinaire, passive, peut encore être expiré par l'action musculaire) était expulsé des poumons, où il ne resterait ainsi, chez le cadavre, que *l'air résiduel;* en conséquence, il commença par insuffler 1476 c.c. d'air, ce qui devait, selon lui, dilater les poumons jusqu'au volume qu'ils avaient possédé à la fin de l'expiration normale. C'est là une erreur, dans laquelle M. Hutchinson ne serait pas tombé s'il avait connu le Mémoire de M. Donders. Dans les circonstances habituelles, „l'air de réserve" existe encore dans les poumons du cadavre [1]), et M. Hutchinson concluait donc à tort de ses expériences que l'élasticité des poumons humains, lors de

[1]) Je néglige ici les écarts que la quantité de cet „air de réserve" peut présenter chez le cadavre, par suite du changement qu'éprouvent les rapports entre les viscères abdominaux et le diaphragme, lorsque l'homme passe de la position verticale à la position horizontale, ou lorsque les animaux se couchent sur le dos.

l'expiration, aurait une valeur de 182 mm. d'eau, ou 13,4 mm. de mercure. Des résultats communiqués par lui pour le cadavre d'homme, il suit, comme nous l'avons vu, que la valeur de cette élasticité n'était, dans son expérience, que de 61 mm. d'eau, ou 4,5 mm. de mercure.

Si désirable qu'il eût été que M. Hutchinson, pour l'insufflation de l'air, opérât plus systématiquement, les chiffres donnés permettent pourtant de calculer, avec beaucoup de probabilité, la valeur qu'il aurait trouvée, par la méthode suivie, pour l'élasticité de ces poumons humains, s'il avait insufflé le volume d'air normal de la respiration, à savoir, 500 c.c. L'accroissement de l'élasticité, de 61 mm. d'eau jusqu'à 182 mm. après l'insufflation de 1476 c.c. d'air, et de 182 mm. jusqu'à 207 mm. après une nouvelle insufflation de 328 c.c., est si régulier, que nous ne pouvons commettre une erreur bien grande en nous en servant pour calculer l'augmentation de force élastique qu'aurait produite l'insufflation de 500 c.c. d'air. Ce calcul montre que l'augmentation en question, pour 500 c.c., aurait été de près de 41 mm. d'eau ou 3 mm. de mercure, c'est-à-dire le double de ce qu'avait admis M. Donders. Si la remarque n'en a pas été faite plus tôt, cela tient probablement à la marche peu systématique suivie par M. Hutchinson pour l'insufflation de l'air et surtout à ce que ses résultats étaient donnés en mesures anglaises.

Quel que fût mon désir de faire l'expérience sur l'homme (avec des poumons sains, donc en cas de mort subite) immédiatement après le décès, je pouvais à peine espérer en trouver jamais l'occasion. J'ai donc dû me borner à l'étude des rapports quantitatifs chez les animaux, afin d'en conclure, par analogie, aux rapports quantitatifs chez l'homme. Il va sans dire que dans cette application il faut tenir compte, ici comme partout ailleurs, des différences caractéristiques qui peuvent exister, en ce qui concerne la respiration, tant entre les différentes espèces d'animaux, qu'entre elles et l'homme.

La voie la plus courte et la plus directe pour parvenir au but serait, naturellement, de déterminer la valeur de la

pression négative dans l'inspiration et l'expiration ordinaires, sur l'animal vivant, en faisant communiquer un manomètre avec la cavité pleurale; mais cette méthode directe a le grand inconvénient qu'on a peu de chances d'apprendre, de cette manière, les rapports dans la respiration *normale*, *paisible*, vu que l'ouverture du thorax et l'introduction d'une canule apportent dans les phénomènes respiratoires un trouble profond. Il n'est donc pas étonnant qu'on ait employé un détour pour arriver à la connaissance de la valeur de la pression négative dans la cavité thoracique de l'animal vivant.

MM. Adamkiewicz et Jacobson [1]) ont à cet effet introduit une canule, fermant hermétiquement, dans le péricarde, et déterminé la pression négative dans cette cavité chez des moutons, des chiens et des lapins. Un trocart, dont le stylet avait une pointe courte et mousse, était enfoncé dans le péricarde à travers le quatrième espace intercostal. A ce trocart était fixé un tube latéral, muni d'un robinet et relié au manomètre. Le stylet fermant hermétiquement est retiré jusqu'au niveau de ce tube latéral. Il en résulte naturellement un espace vide d'air, et MM. Adamkiewicz et Jacobson pensent que cette aspiration, qui correspondait à une pression d'environ 1,5 mm. de mercure, doit être soustraite des chiffres trouvés par eux pour la pression négative. Ils obtiennent ainsi, chez ces animaux, une pression négative de 3 à 5 mm. de mercure, chiffres qu'ils n'ont pas vu dépasser durant la respiration paisible.

MM. Heger et Spehl [2]) donnent aussi trois déterminations de la *différence* de pression qu'ils ont trouvée, pendant l'inspiration et l'expiration, dans le péricarde du lapin, au moyen de leur „fistule péricardique''. Ils se proposaient de déterminer la quantité de sang dans les poumons au moment de l'inspiration et de l'expiration, et à cet effet ils introduisaient dans le péricarde un petit tube en U, sur lequel les vaisseaux afférents et efférents

---

[1]) *Centralblatt f. d. Med. Wissensch.*, 1873, p. 483.

[2]) *Recherches sur la fistule péricardique chez le lapin* (*Arch. de biol.*, t. II, p. 153, 1881).

du cœur pouvaient être liés instantanément. A l'un des bras de ce tube en U était adapté un manomètre, et, après que le tube avait été fixé hermétiquement dans le péricarde, on reliait l'autre bras à un aspirateur, à l'aide duquel on produisait une raréfaction d'air de 4 à 10 mm. de mercure. Dans trois expériences faites de cette façon, les auteurs observèrent dans le péricarde une *différence* de pression de 5, 2 et 4 mm., donc en moyenne de 3,6 mm. *Hg*, pendant l'inspiration et l'expiration.

Suivant M. Luciani et M. Rosenthal [1]), il y a un moyen bien plus simple et plus facile d'étudier les oscillations de la pression négative dans la cavité thoracique. Il suffit, pour cela, d'introduire une sonde dans l'œsophage. La sonde étant reliée à un manomètre, on voit celui-ci baisser à chaque inspiration et monter à chaque expiration, conformément au changement de la pression intrathoracique lors de l'augmentation et de la diminution de volume des poumons. En employant, au lieu du manomètre, le cardiographe de Marey, on a, suivant M. Rosenthal, — je n'ai pu consulter le Mémoire de M. Luciani — une des meilleures méthodes pour enregistrer les périodes et l'intensité des mouvements respiratoires, les oscillations constituant une mesure directe du degré de dilatation ou de contraction que le thorax éprouve. Mais, suivant M. Rosenthal, la *valeur absolue* de la pression négative pourrait également être déterminée de cette manière, si l'on munit la sonde d'un robinet et qu'on l'introduise, ainsi fermée, dans l'œsophage, comme MM. Adamkiewicz et Jacobson introduisaient leur trocart dans le péricarde [2]). Le robinet n'étant alors ouvert qu'après que l'extrémité ouverte de la sonde a pénétré dans la partie de l'œsophage contenue dans le médiastin, le manomètre indique, selon M. Rosenthal, la *vraie valeur absolue* de la pression négative

---

[1]) Voir l'article „*Athembewegungen*" dans: Hermann, *Handbuch der Physiologie*, t. IV, 2e part, p. 226, et *Archiv f. Physiologie von* Du Bois-Reymond, 1880, *Supplementband*, p. 34.

[2]) *Ueber den intrathoracalen Druck*, dans: *Archiv f. Physiol. von* Du Bois-Reymond, 1882, p. 152.

dans le thorax. Aussi M. Rosenthal trouve-t-il ainsi les mêmes chiffres que MM. Adamkiewicz et Jacobson. Chez les lapins, il obtient tout au plus une valeur de 40 mm. d'eau = 3 mm *Hg* pour la pression négative. Les chiens et les chats lui donnent à peu près les mêmes chiffres; pourtant, d'après lui, la pression négative est „chez les chiens, parfois un peu plus grande, allant jusqu'à 50 mm. d'eau, et les mouvements respiratoires sont chez eux plus étendus que chez les lapins''. Il a aussi fait, en collaboration avec M. Leube, des déterminations analogues sur l'homme, déterminations dont les résultats sont communiqués par lui dans les termes suivants: „La pression négative s'élevait à 40—60 mm. d'eau, c'est-à-dire à une valeur peu plus élevée que chez le lapin; les mouvements respiratoires ordinaires ne produisent que des oscillations de quelques millimètres. Mais lorsqu'on fait respirer profondément, la pression monte à — 100 jusqu'à — 120 mm''.

Tant MM. Adamkiewicz et Jacobson que M. Rosenthal partent, comme le prouve leur conclusion, de l'hypothèse que dans le péricarde et dans la partie thoracique de l'œsophage règne la même pression que dans la cavité pleurale. En admettant pour un instant la vérité de cette hypothèse, nous avons donc à rechercher quel changement s'opère lorsqu'on introduit dans ces parties un manomètre contenant un certain nombre de c.c. d'air à la pression atmosphérique ordinaire. Aussitôt que la communication avec la cavité péricardique, ou avec l'œsophage, sera établie, cet air se dilatera de manière que sa tension devienne égale à la pression dans le péricarde, ou dans l'œsophage. Jusqu'à quel point il en résultera un changement dans les rapports, cela dépendra du changement de capacité du bras de communication du manomètre et de l'agrandissement de volume de l'air qui y est contenu. La capacité du bras fermé du manomètre, jusqu'au péricarde, est *agrandie* par le retrait du stylet dans le trocart, *rapetissée* par l'ascension de la colonne liquide dans le bras fermé, ensuite de la diminution de pression. Lorsque ces deux changements de capacité

se balancent exactement, la condition normale du cœur et du péricarde n'est pas modifiée, et la tension du péricarde (par conséquent aussi la résistance qu'il oppose à la pression atmosphérique) conserve sa valeur ordinaire. Lorsque l'air contenu dans le tube de communication se dilate, une certaine quantité de cet air pénètre dans le péricarde, qui par suite se gonfle, diminuant d'autant l'espace qui reste dans le thorax pour les poumons. L'expansion de ceux-ci sera alors réduite de tout l'espace occupé en plus par le péricarde. Si la tension du péricarde, dans ces circonstances, s'écarte peu de l'état normal, la pression dans la cavité péricardique changera peu, parce que la résistance du péricarde (son coefficient d'élasticité) ne subit aussi qu'un faible changement. Si la quantité d'air qui du tube de communication du manomètre passe dans le péricarde est grande, il pourra en résulter une augmentation notable de la tension du péricarde, et par suite aussi un changement de la pression dans la cavité péricardique [1]).

Comme, dans les expériences de MM. Adamkiewicz et Jacobson, il n'aura probablement pas pénétré beaucoup d'air dans la cavité péricardique, je suis porté à croire que la pression qu'ils y ont rencontrée ne différait pas sensiblement de celle qui y règne normalement.

Or, la résistance du péricarde, et par conséquent aussi la différence de pression des cavités péricardique et pleurale, est

---

[1]) C'est ce que prouvent les expériences de MM. Heger et Spehl. Ils ouvraient le péricarde, de manière que l'air y avait un libre accès, et néanmoins les poumons ne s'affaissaient pas: „Malgré l'ouverture du médiastin", disent-ils (*l. c.*), „la respiration s'effectue régulièrement et le jeu du diaphragme provoque une expansion pulmonaire qui permet de conserver l'animal vivant pendant des heures. Parfois il arrive cependant que, dans les premières minutes qui suivent l'incision sternale, la respiration est anxieuse, saccadée, entrecoupée de spasmes tétaniques, qui font craindre l'asphyxie; si la plèvre est intacte, cette gêne ne sera que momentanée et après quelques convulsions le calme se rétablira et toute menace d'asphyxie disparaît". Dans ces conditions, le péricarde est donc dilaté, et par suite tendu, dans une mesure telle qu'il résiste à la pression atmosphérique.

certainement faible. Pour cette raison, j'admets volontiers que les chiffres trouvés par MM. Adamkiewicz et Jacobson, pour la pression négative dans la cavité péricardique, s'accorderont assez bien avec ceux de la cavité pleurale. Mais la dépression de 1,5 mm. *Hg*, que détermina le retirement du stylet, ne doit pas être soustraite des chiffres trouvés, ainsi que l'ont fait MM. Adamkiewicz et Jacobson; à la valeur donnée par eux il faut donc ajouter 1,5 mm. *Hg* pour obtenir la vraie pression négative dans le péricarde.

J'ai beaucoup plus d'objections contre l'application de cette hypothèse à l'œsophage. Bien entendu, je ne conteste nullement que le médiastin postérieur et l'œsophage qu'il entoure n'éprouvent aussi l'influence de la pression négative qui règne dans la cavité pleurale; mais, que la pression négative dans la partie thoracique de l'œsophage soit *égale* à celle de la cavité pleurale, voilà ce qui est improbable à priori. La résistance de la paroi œsophagienne et du médiastin devrait alors être nulle. Dès qu'elle possède une certaine valeur, l'air contenu dans l'œsophage clos doit se trouver sous une pression plus élevée que celle de la cavité pleurale, la différence étant précisément égale à cette résistance. Tout ce qui a été dit ci-dessus, à propos des recherches de MM. Adamkiewicz et Jacobson, du péricarde et de sa cavité, s'applique aussi, *mutatis mutandis*, au cas actuel. Mais la résistance de la paroi œsophagienne, avec son entourage de tissu connectif et sa tunique musculeuse, est indubitablement beaucoup plus grande et augmente dans une mesure notable dès que la paroi musculeuse est tendue. Si l'on introduit la sonde ouverte dans l'œsophage et que par conséquent l'air atmosphérique y pénètre librement, la paroi œsophagienne sera vite dilatée de manière à supporter, comme le péricarde dans les expériences de MM. Heger et Spehl, la pression totale de l'atmosphère, et cette dilatation ne pourra être considérable, comme le prouve le fait qu'aucun trouble important de la respiration n'est éprouvé à la suite de l'introduction d'une sonde œsophagienne ouverte. La paroi de l'œsophage et le tissu

connectif du médiastin qui l'entoure opposent donc une certaine résistance, et, autant vaut cette résistance, autant devra être plus faible la pression négative qu'on trouve dans l'œsophage avec une sonde fermée.

Il est regrettable que M. Rosenthal n'ait pas cherché à vérifier sa théorie par l'expérience. S'il l'avait fait, il aurait immédiatement reconnu qu'avec la sonde œsophagienne on ne mesure, comme il était à prévoir, qu'une partie de la pression négative existant dans la cavité pleurale, et que par là s'explique aisément la faiblesse des chiffres qu'il a obtenus pour la pression négative en général et pour ses différences dans l'inspiration et l'expiration tranquilles.

Plus loin, en faisant l'exposé de mes propres recherches, je reviendrai encore brièvement sur la théorie de M. Rosenthal. Des expériences qui seront alors communiquées, il ressortira avec évidence, je crois, que la valeur absolue de la pression négative dans la cavité pleurale, chez les animaux et chez l'homme, ne peut être trouvée de cette manière.

Directement dans la cavité pleurale, la pression négative a été déterminée par M. d'Arsonval [1]) et par M. Fredericq [2]). A l'origine, M. d'Arsonval introduisait un trocart mousse dans la cavité pleurale droite; mais, le poumon étant parfois blessé dans cette opération, il mit plus tard la plèvre costale à nu, y pratiqua une petite ouverture et fit alors pénétrer dans la cavité pleurale une canule incompressible, munie de trous latéraux. A la partie de cette canule sortant du thorax était lié un bout de tube en caoutchouc. Ce tube de caoutchouc servait à aspirer l'air entré dans le thorax, après quoi on le fermait par une serre-fine. La communication de la canule avec le manomètre ou avec le cardiographe pouvait alors être établie. M. d'Arsonval trouva ainsi, dans la cavité pleurale d'un chien respirant librement et normalement, une pression

[1]) *Recherches théoriques et expérimentales sur le rôle de l'élasticité des poumons dans les phénomènes de la circulation*, Paris, 1877.

[2]) *Archives de biologie*, t. III, 1882, p. 55.

négative de 200—220 mm. lors de l'inspiration et de 150 mm. lors de l'expiration, par conséquent, une *différence de pression* de 60 mm. d'eau ou 4,4 mm. *Hg*.

M. d'Arsonval ne rapporte que cette seule expérience et n'ajoute d'ailleurs aucun commentaire. La valeur *absolue* de la pression négative qu'il a trouvée dans la cavité thoracique est, on le voit, très grande, mais cette circonstance paraît lui avoir échappé.

M. Fredericq introduit dans la cavité pleurale, à travers les muscles intercostaux, un petit tube de verre à pointe mousse, qui est relié au manomètre et possède une ouverture latérale. Cette introduction se fait sans que l'air pénètre dans la plèvre. Le manomètre est rempli de mercure et d'eau, ou bien d'eau seule, jusqu'au tube de verre. M. Frédericq trouve ainsi que la pression intrathoracique ne présente que de très petites oscillations. Il ne donne toutefois aucun chiffre, ni pour la valeur absolue de la pression négative, ni pour la différence de pression [1]).

Quel que soit l'intérêt attaché à la détermination de la pression négative sur l'animal vivant, il m'a paru impossible de trouver de cette manière, les relations normales et en conséquence je suis revenu assez promptement à la méthode indirecte appliquée par M. Donders et M. Hutchinson et consistant à déduire la pression négative dans le thorax de l'élasticité du tissu pulmonaire à différents degrés d'expansion.

Immédiatement après la mort de l'animal, — qui dans les expériences suivantes a toujours eu lieu par hémorrhagie à la suite de la section de l'aorte abdominale, — les nerfs vagues et sympathiques étant ordinairement coupés au cou, — je

[1]) Au moment de la correction de ces pages, je reçois de M. Weil une monographie „*Zur Lehre vom Pneumothorax*, dans laquelle se trouvent quelques déterminations de la pression négative dans le thorax chez le lapin et le chien. Je reviendrai sur les déterminations de M. Weil après que j'aurai communiqué mes résultats.

coupés au cou, — je liais dans la trachée une pièce en T, dont chacun des deux bras portait un robinet. L'un des bras conduisait à un manomètre, l'autre communiquait avec un tube gradué rempli d'air, par lequel, au moyen de la pression d'une colonne d'eau, on pouvait insuffler dans les poumons la quantité d'air voulue. Les robinets que portait la pièce en T fixée dans la trachée permettaient de retirer les poumons du thorax sans que l'air „résiduel" fût expulsé.

Ces déterminations ne fournirent, pas plus que celles faites sur les poumons morts, le résultat désiré. Maintenant encore, les chiffres montraient tant de discordances, que la valeur de l'élasticité des poumons, à différents degrés d'expansion, ne pouvait en être conclue, même approximativement.

Ce résultat s'explique. Lorsqu'on ouvre le thorax après la mort, les poumons, ainsi que l'ont montré MM. Hermann et Keller [1]), ne deviennent pas atélectasiques, mais renferment toujours encore un peu d'air, parce que, dans ces circonstances, les bronchioles s'affaissent au point le plus étroit, c'est-à-dire, à leur passage dans l'infundibulum, de sorte que l'air contenu dans les alvéoles ne peut plus s'échapper [2]). Par suite aussi, une fois les poumons affaissés, l'accès aux alvéoles est fermé à l'air en beaucoup d'endroits. Il en résulte que, si l'on vient à insuffler de l'air, il ne se produit pas une expansion uniforme. Dans les insufflations successives, continuellement des bronchioles s'ouvrent qui étaient fermées dans une expérience précédente, et réciproquement. On a donc, ici également, affaire chaque fois à d'autres poumons. Même quand les poumons n'ont pas subi un affaissement complet, mais ont été maintenus dans l'état d'expansion où ils se trouvent après une expiration ordinaire, l'insufflation de l'air par la trachée ne produit pas une dilatation *uniforme*, l'air ne trouvant pas partout un accès également facile aux alvéoles pulmonaires.

---

[1]) *Archiv f. Physiol. von* Pflüger, t. XX, 1879, p. 365.

[2]) Lorsque la vie persiste, cet air est peu à peu absorbé par le sang, et, dans ces conditions, une atélectasie véritable se produit.

Si l'on veut obtenir des résultats utilisables, il faut dilater les poumons non par une pression positive du côté de la trachée, mais par une diminution de pression sur leur face pleurale, comme cela a lieu durant la vie. M. Hutchinson était déjà arrivé à cette même conviction, ainsi que je l'ai reconnu plus tard. „The lungs", dit-il (*l. c.*, p. 1059), „are very delicate organs and can resist but little artificial force: for if once inflated to the ordinary state of either the breathing volume or vital capacity volume, they do not appear able to collapse again to their original size; — probably intralobular emphysema is produced.

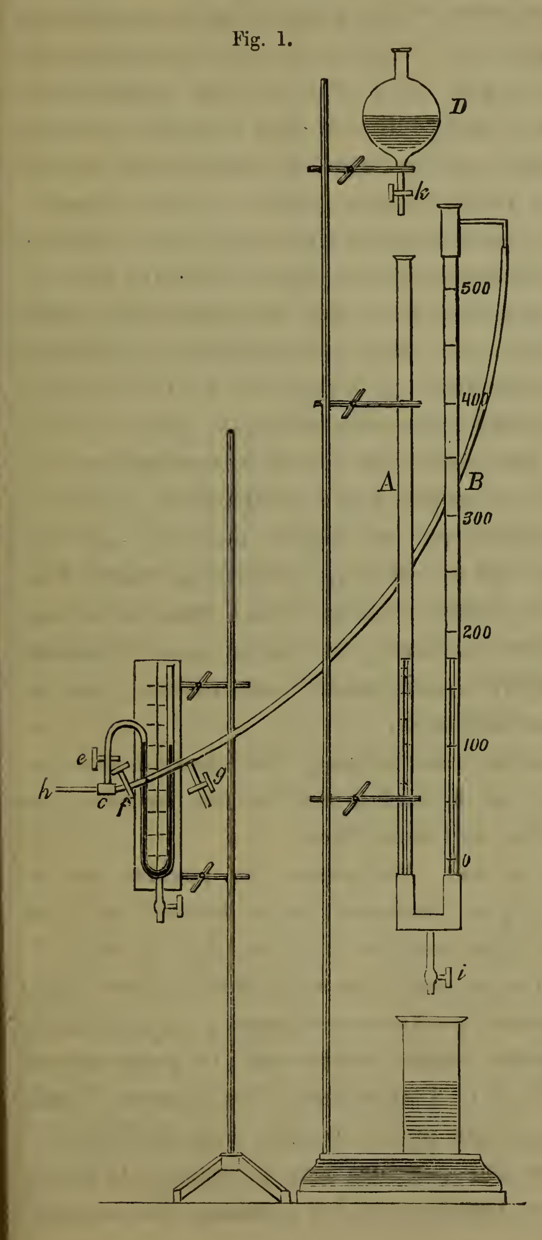
In our experiments we forced air into the lungs; they were expanded because we inflated them. We now think it would be better to inflate them by expanding them (removing the external atmospheric pressure), and allow the air to drop into the air vesicles by its own gravitation (as in living respiration), when they would in all probability collapse freely to their original position".

Effectivement, les poumons sont des organes très délicats, qui opposent peu de résistance aux influences nuisibles. Lorsqu'on les extrait du thorax, quelque soin qu'on apporte à cette opération, ils subissent aisément une compression en l'un ou l'autre point. Aussi m'a-t-il paru beaucoup plus sûr de laisser les poumons en place et de déterminer leur expansion par la pression négative que produit l'abaissement du diaphragme.

Je me suis servi de l'appareil représenté dans la fig. 1. Deux tubes communiquants A et B, d'environ 500 c.c. de capacité et dont l'un, B, est divisé en c.c., sont reliés, par un tube de caoutchouc à parois épaisses, à une pièce en T, dont l'extrémité ouverte h est fixée hermétiquement dans la trachée de l'animal au moyen de plusieurs ligatures de soie épaisse. L'autre bras conduit au manomètre. Les robinets e, f et g permettent d'établir ou de supprimer le contact avec l'air et avec le manomètre. La cavité abdominale ayant été ouverte, puis la trachée unie à l'appareil, un aide abaissait uniformément le diaphragme, jusqu'à ce que la quantité voulue d'air eût été

aspirée dans les poumons. Au fur et à mesure que l'air pénétrait dans les poumons, on laissait couler, avec la même régularité, l'eau du réservoir *D*, de manière qu'à la fin le niveau fût redevenu égal dans les deux tubes et que l'air contenu dans les poumons se trouvât par conséquent sous la pression de l'atmosphère. Le robinet *f* étant alors fermé, la main retirée de la cavité abdominale et le robinet *c* ouvert, on lisait sur le manomètre la force élastique des poumons dans les conditions de l'expérience. La valeur ainsi obtenue pour l'élasticité pulmonaire est nécessairement trop faible, parce que, en dépit de l'occlusion de la trachée, les poumons s'affaissent un peu, par suite de la compression que leur élasticité même fait subir à l'air qu'ils renferment. A proprement parler, on ne déter-

Fig. 1.



mine donc pas l'élasticité que les poumons possèdent lorsqu'ils sont distendus par le volume d'air aspiré, mais l'élasticité qu'ils ont en présence de ce volume d'air diminué de la quantité qui correspond à la compression. L'erreur en question est naturellement d'autant plus grande qu'il reste un plus grand espace entre les poumons et le manomètre. Il faut donc lier la canule aussi profondément que possible dans la trachée, et réduire aussi, autant qu'on le peut, l'espace nuisible h, f et e jusqu'à la colonne liquide du manomètre. Surtout quand on opère sur de petits animaux, l'influence de cet espace doit être prise en considération. Dans mes expériences sur des animaux de petite taille, il n'était que de 3 c.c. Dans mes premières expériences sur des animaux plus grands, il s'élevait à 9—12 c.c.; plus tard, je l'ai réduit aussi pour ces animaux jusqu'à 6 c.c., mais, en employant successivement les deux manomètres avec les mêmes poumons, au même degré d'expansion, j'ai eu la satisfaction de reconnaître que cet espace nuisible, dans mes premières expériences sur des chiens, n'avait pas exercé d'influence sensible sur les chiffres trouvés. Peu à peu, je me suis convaincu que par cette méthode on obtient pour l'élasticité des poumons des chiffres *parfaitement* concordants, s'il est satisfait aux conditions suivantes:

1°. Lors de l'aspiration, les volumes d'air doivent être mesurés *très*-exactement, et la tension de l'air doit être toujours absolument égale à celle de l'atmosphère.

2°. Pour atteindre ce but, l'expansion du poumon doit se faire uniformément et par conséquent avec lenteur, et l'eau doit également affluer d'une manière uniforme dans le tube A, de façon que durant l'aspiration il ne se produise aucune différence notable de pression, positive ou négative, et qu'à la fin de l'aspiration le liquide occupe exactement le même niveau dans les deux tubes A et B. L'affaissement des poumons, après l'expansion, ne doit pas non plus s'effectuer trop rapidement.

3°. L'expérience ne doit pas être trop prolongée. Il faut y mettre fin dès que la température des poumons s'est notable-

ment abaissée. Si, dans ce cas, on continue l'expérience, les chiffres qu'on obtient, pour le même degré d'expansion, deviennent successivement plus forts. Pour cette raison, et eu égard aux conditions mentionnées en 2°., l'expérience présente plus de difficultés chez les animaux de grande taille, parce qu'alors il y a de grandes quantités d'air à déplacer et que, par suite, chaque détermination demande plus de temps.

4°. Le premier chiffre qu'on obtient est ordinairement trop faible et doit donc être négligé. Cela est surtout le cas lorsque, à la première expansion des poumons, il n'a été aspiré qu'une petite quantité d'air. On peut alors se convaincre directement qu'après l'expansion il reste plus d'air dans les poumons qu'il n'y en avait auparavant. En effet, si on laisse écouler par le robinet i assez d'eau pour que le niveau dans le tube A reprenne sa hauteur primitive, le liquide devrait, dans la supposition que le volume d'air contenu dans les poumons n'eût pas varié, se trouver au même niveau dans les deux tubes A et B. Or, tel n'est pas le cas; l'eau s'élève alors plus haut dans le tube B, preuve que les poumons contiennent plus d'air, et sont donc moins affaissés, après qu'avant l'expansion [1]).

Pour montrer que, lorsque toutes les précautions sont observées, les chiffres qu'on trouve pour l'élasticité des poumons à des degrés égaux d'expansion ne laissent rien à désirer, je communiquerai ici, dans leur entier, quelques-unes de mes expériences.

---

[1]) Je présume que cela tient à ce que, lorsque l'animal est couché sur le dos, la cavité abdominale ouverte, le diaphragme se voûte un peu plus que dans l'expiration ordinaire, de sorte que les poumons s'affaissent aussi un peu plus dans le thorax fermé, en supination, que lors de l'expiration ordinaire, dans l'attitude debout. Dans ce cas, il se produira encore le phénomène sur lequel MM. Hermann et Keller ont attiré l'attention. Après la mort de l'animal, il se passe un certain temps avant que le manomètre soit fixé dans la trachée, et durant ce temps un peu d'oxygène est sans doute encore absorbé. Les bronchioles et les conduits alvéolaires doivent alors être d'abord rouverts, et les alvéoles eux-mêmes remplis de nouvel air, avant que les rapports normaux soient rétablis.

	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression positive dans la trachée, en mm. d'eau.						
1	146	44	50	53	56			
	155		57	57				
	200		67	66				
	250		81	79				
	300		92	91				
	320		99	94				
2	50	40	42	42	44	47	44	43
	100		74	76	76	80	76	
	120		84	84		88	84	
	140			91		99	96	
3	50	31	39	39	39			
	105		69	71				
	120		79	81				
	137		84	88				
4	50	37	41	41				
	100		67	69				
	115		77	77				
	125		81	81				
5	10		28	29	29			
	12		34	34				
	18.5		50	46	46	46		
	25.5		65	65	65	65		

Les quatre premières séries sont relatives au chien, la cinquième au lapin.

Il va sans dire que les chiffres ne furent pas toujours aussi parfaitement égaux que dans les expériences qui viennent d'être citées et qui se rapportent à la fin de mes recherches, alors que j'avais appris à connaître toutes les circonstances qui peuvent donner lieu à des résultats défectueux; pourtant, dès mes premières expériences, les résultats étaient déjà de nature à me rassurer suffisamment sur la valeur de la méthode employée.

Pour avoir un terme de comparaison, j'ai déterminé en premier lieu, chez le chien et chez le lapin, l'élasticité des poumons au degré d'expansion qu'on obtient lorsque le volume d'air aspiré est dans un rapport déterminé avec le poids du corps. Pour l'homme de taille moyenne, du poids de 72 kilogrammes, on admet généralement que la quantité normale de l'air respiré est de 500 c.c. Provisoirement, je supposai que chez le chien et le lapin le rapport entre le poids du corps et l'air respiratoire serait le même que chez l'homme.

L'expérience terminée et les poumons de nouveau affaissés, j'ouvrais le thorax et déterminais ainsi l'élasticité des poumons lors de l'expiration.

J'ai trouvé de cette manière, chez le chien :

	Poids du corps, en kilogr.	Capacité respiratoire calculée, en c.c.	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression positive dans la trachée, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. d'eau	l'inspiration, en mm. *Hg.*	l'expiration, en mm. d'eau	l'expiration, en mm. *Hg.*	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. d'eau	Différence, en mm. *Hg.*
1	5.7						53	3.9		
2	6.7	47	47	43	98	7.2	55	4.	43	3.2
3	6.8	47	47	39	96	7.1	57	4.2	39	2.9
4	7.	50	50	43	96	7.1	53	3.9	43	3.2
5	7.2	50	50	39	94	7.	55	4.	39	2.9
6	7.5	52	50	39	91	6.7	52	3.8	39	2.9
7	8.2	57	60	47	103	7.6	56	4.1	47	3.5
8	8.5	59	60	42	95	7.	53	3.9	42	3.1
9	8.8	61	60	52	—	—	—	—	52	3.8
10	12.3	86	86	43	95	7.	52	3.8	43	3.2
11	14.	97	100	52	118	8.7	66	4.8	52	3.8
12	14.6	101	100	40	91	6.7	51	3.7	40	3.0
13	15.5	108	110	45	100	7.4	55	4.	45	3.3
14	21.	146	146	54	115	8.5	61	4.5	54	4.0
15	22.1	153	155	53	110	8.1	57	4.2	53	3.9
16	24.5	170	—	—	—	—	52	3.8	—	—
17	26.5	184	180	55	103	7.6	48	3.5	55	4.0
18	33.	230	230	34	85	6.3	51	3.7	34	2.5

Ainsi que je l'ai déjà dit, les chiffres qu'on obtient pour

l'élasticité s'élèvent peu à peu lorsque l'expérience est longtemps prolongée. Pour cette raison, dans les expériences 1 et 16, le thorax fut ouvert immédiatement, afin de contrôler les autres chiffres relatifs à l'élasticité dans l'expiration, chiffres qui, naturellement, ne peuvent être obtenus qu'à la fin de l'expérience. Dans l'expérience 9, la détermination de l'élasticité fut perdue, parce qu'on avait oublié de fermer le robinet du tube trachéal.

Il suit des chiffres ci-dessus que, pour les chiens de moins de 10 kilogr., la pression négative dans le thorax est en moyenne, lors de l'inspiration, de 7,1 et lors de l'expiration de 4 mm. *Hg*, de sorte que la différence de pression est en moyenne de 3,1 mm. *Hg;* chez les chiens pesant plus de 10 k., on a trouvé, en moyenne, lors de l'inspiration 7,5, lors de l'expiration 4,0, et par conséquent, pour la différence de pression, 3,5 mm. *Hg*.

Les chiffres présentent, comme on le voit, un très grand accord pour les chiens de taille médiocre; chez les animaux de taille plus forte, ils offrent plus de divergences, aussi bien pour ce qui regarde la valeur *absolue* de la pression négative, qu'en ce qui concerne la *différence* de pression dans l'inspiration et l'expiration. À côté de chiffres plus élevés, on en trouve ici de plus bas, et c'est uniquement pour cela que la moyenne s'écarte si peu de celle des animaux de taille moindre. Quant à la cause de ces inégalités, je n'ose rien décider. Je serais porté à l'attribuer à l'influence de l'âge. Dans l'expérience 14, le chien était indubitablement jeune, dans les expériences 17 et 18, indubitablement vieux; mais, pour les autres animaux, je ne sais rien à cet égard.

Quand on opère sur des lapins, il en coûte plus de soins qu'avec les chiens pour obtenir des résultats nets, et cela s'explique. En premier lieu, les volumes d'air sont moindres, et de petites inexactitudes dans la détermination des volumes d'air aspirés font immédiatement croître ou décroître notablement le chiffre qu'on trouve pour la pression. Il faut donc mesurer très

exactement. En second lieu, la quantité d'air voulue doit être aspirée très régulièrement et très lentement. Dès qu'on néglige ce point, des discordances sensibles apparaissent dans les chiffres qu'on obtient successivement pour l'élasticité des poumons aux mêmes degrés d'expansion. Je présume que, dans le poumon du lapin, quelques bronchioles et conduits alvéolaires s'affaissent déjà promptement quand la pression négative devient un peu forte, et que de là résulte une expansion irrégulière des poumons.

Il y a encore une autre précaution à observer. La canule doit être fixée dans la trachée de telle sorte que celle-ci conserve sa situation normale. A la moindre inattention, il peut facilement arriver qu'en liant la trachée sur la canule on la tire trop en dehors. Dans ce cas, les poumons ne peuvent pas se dilater normalement et les chiffres aussi doivent par conséquent devenir anormaux.

Lorsqu'on ne perd de vue aucune des circonstances dont il vient d'être question, on obtient aussi chez les lapins, comme il a déjà été dit, des chiffres très concordants.

C'est ainsi que j'ai trouvé, chez ces animaux :

	Poids du corps, en kilogr.	Capacité respiratoire calculée, en c.c.	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression positive dans la trachée, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. *Hg.*	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. *Hg.*	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. d'eau	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. *Hg.*
1	3.69	25.6	25.5	65	97	7.1	32	2.3	65	4.8
2	2.60	18.	18.	70	101	7.5	31	2.3	70	5.1
3	2.37	16.5	16.5	69	105	7.7	36	2.6	69	5.1
4	2.08	15.	15.	70	105	7.7	35	2.6	70	5.1
5	2.05	15.	15.	75	111	8.1	36	2.6	75	5.5
6	1.98	13.7	14.	70	106	7.8	36	2.6	70	5.1
7	1.90	13.2	14.	72					72	5.3

D'après ces déterminations, la pression négative, chez les lapins, serait en moyenne, à l'inspiration, de 7,6, à l'expira-

tion, de 2,5 mm. *Hg*, et la différence de pression s'élèverait donc, en moyenne, à 5,1 mm. *Hg*, c'est-à-dire à environ 2 mm. *Hg* de plus qu'il n'a été trouvé chez les chiens.

Mais, pour peu qu'on y réfléchisse, on reconnaît qu'il y a une circonstance dont il convient de tenir compte. L'estomac et les gros intestins du lapin sont remplis d'une grande quantité de matière végétale, et le poids de cette matière doit être retranché du poids brut de l'animal, si l'on veut avoir le vrai poids du corps.

En faisant cette soustraction pour les quatre premières expériences de la série ci-dessus, et déduisant du poids ainsi rectifié la capacité respiratoire, suivant le même rapport, on trouve :

	Poids rectifié du corps, en kilogr.	Capacité respira-toire calculée, en c.c.	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression positive dans la trachée, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. *Hg*.	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. *Hg*.	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. d'eau	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. *Hg*
1*	2.66	18.5	18.5	46	78	5.7	32	2.3	46	3.4
2*	2.05	15.	15.	55	86	6.3	31	2.3	55	4.0
3*	1.81	12.5	12.5	54	90	6.6	36	2.6	54	4.0
4*	1.77	12.	12.	55	91	6.7	36	2.6	55	4.0

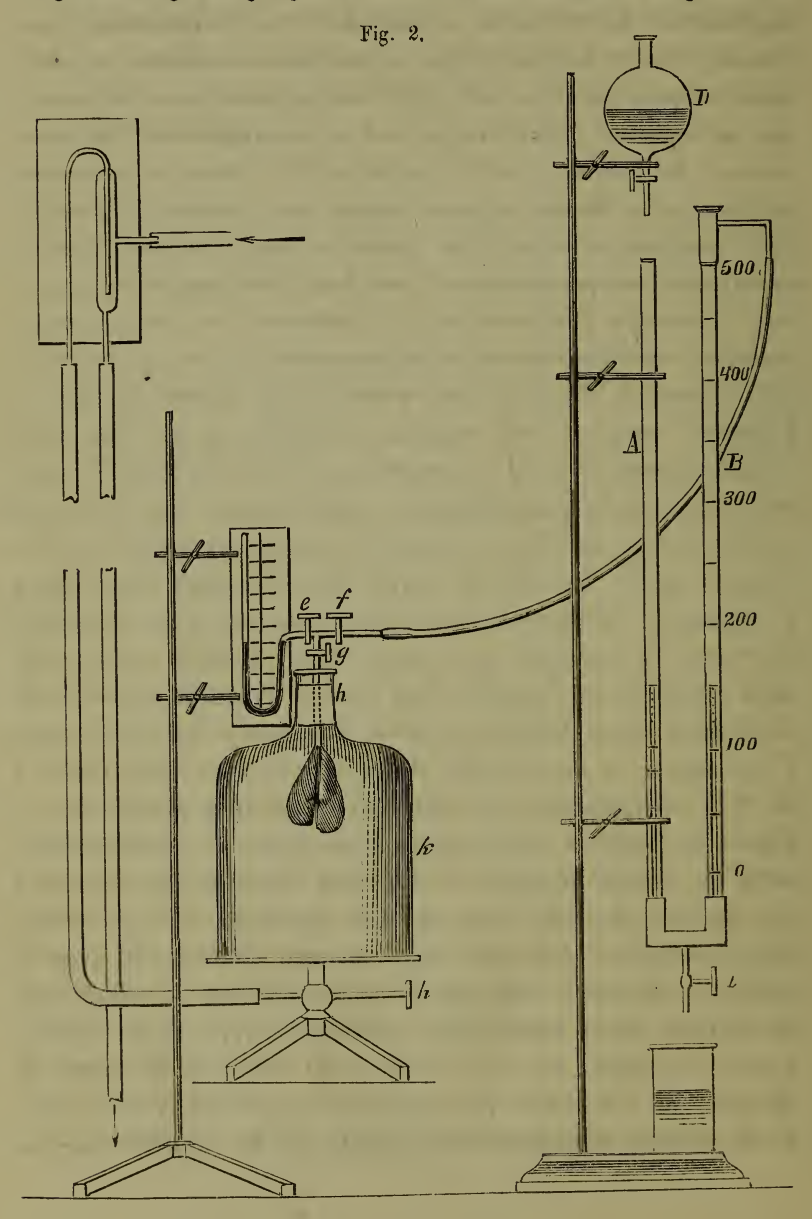
La pression négative devient donc alors en moyenne, à l'inspiration, 6,3, à l'expiration, 2,4, et par conséquent la différence de pression, en moyenne, 3,9 mm. *Hg;* en d'autres termes, si la supposition que nous avons faite était exacte, la *valeur absolue* de la pression négative, tant à l'inspiration qu'à l'expiration, serait chez les lapins plus petite que chez les chiens, tandis que la *différence* de pression serait au contraire un peu plus grande.

La première question qui s'élève maintenant est celle de

savoir si les chiffres obtenus expriment bien uniquement l'élasticité des poumons, ou s'ils ne sont pas au contraire trop forts, parce que les côtes auraient aussi été soulevées, et que les poumons auraient par suite été comprimés activement lorsqu'on relâchait le diaphragme. A cet égard, je ferai observer, premièrement, que chez le chien et le lapin le type respiratoire est éminemment abdominal et que, lorsqu'on provoque l'ampliation de la cavité thoracique en abaissant le diaphragme, on ne remarque rien d'un soulèvement des côtes. Avec la variation de volume relativement petite que le thorax éprouve quand on y aspire la quantité d'air respiratoire déduite du poids du corps, aucune trace de dilatation n'est perceptible. Il est donc très improbable que la cage thoracique elle-même ait de l'influence. Je n'ai pas laissé, toutefois, de m'en assurer expérimentalement, et, à cet effet, j'ai déterminé l'élasticité des poumons au dehors du thorax. L'appareil employé est représenté dans la fig. 2. Les tubes communiquants A et B, les mêmes que ceux de la fig. 1, sont reliés à la cloche pneumatique k, dans laquelle l'air peut être raréfié au moyen d'une pompe de Bunsen. Avant d'ouvrir le thorax, on lie un tube de verre dans la trachée et on ferme le robinet g. Les poumons sont ensuite extraits avec précaution du thorax et introduits sans retard dans la cloche k. On y fait alors pénétrer par aspiration des volumes déterminés d'air, sous la pression atmosphérique normale. Dès que la quantité voulue a été aspirée et que l'égalité de niveau dans les deux tubes A et B a été rétablie par l'eau qui coule du reservoir D, on tourne le robinet h, de manière à supprimer la communication entre le thorax artificiel et la pompe aspirante. Ce robinet h est construit de telle sorte que non seulement la cavité thoracique artificielle peut être mise ou non en rapport avec la pompe de Bunsen, mais que le contact de l'air extérieur avec le contenu de la cloche peut aussi être supprimé ou établi à volonté. Aussitôt que, la cloche étant isolée de la pompe de Bunsen, on a reconnu que tout juste la quantité voulue d'air, à la pression atmosphérique normale, a été aspirée dans les

poumons, on ferme le robinet *f*, et après avoir établi le contact de l'air atmosphérique avec la cloche *k*, on ouvre le robinet *e*. L'espace *g*, *e*, *f*, et la capacité du tube lié dans la trachée ont été pris aussi petits que possible et ne s'élèvent ensemble qu'à 3 c.c.

Fig. 2.



Un tube pourvu d'un robinet g étant fixé dans la trachée du lapin, je déterminai d'abord par l'appareil antérieur (fig. 1), en ouvrant la plèvre, l'élasticité des poumons à l'expiration. Ensuite le robinet g fut fermé, et les poumons, enlevés avec précaution du thorax, furent portés dans la cloche k. Après que la communication avec le manomètre et avec les tubes communiquants A et B eut été établie, on ouvrit le robinet g, puis on aspira comme précédemment des quantités déterminées d'air du tube B, air dont la tension était maintenue, grâce à l'afflux d'eau dans le tube A, égale à celle de l'atmosphère. On obtint ainsi:

	Poids du corps, en kilogr.	Capacité respiratoire calculée, en c.c.	Quantité de l'air inspiré, en c c.	Pression positive dans la trachée, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. *Hg*.	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. *Hg*.	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. d'eau	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. *Hg*.
1	2.26	15.8	16	68	68	5.0	39	2.8	29	2.1
2	2.13	14.8	15	67	67	5.0	36	2.6	31	2.2

Les résultats sont, comme on le voit, très concordants entre eux, mais *beaucoup* plus faibles que ceux obtenus antérieurement par l'expansion des poumons *dans le thorax*. Là, la pression à l'inspiration s'élevait en moyenne à 7,6 et la différence de pression à 5,1 mm. *Hg;* ici, seulement à 5 et à un peu plus de 2 mm. *Hg*.

Au premier abord, ce résultat semble plaider fortement pour l'opinion que la paroi thoracique, dans les premières expériences, a exercé de l'influence, et même une influence très grande, sur les chiffres de l'élasticité. Pourtant, on se tromperait fort en s'arrêtant à une pareille conclusion.

Pendant que, pour déterminer l'élasticité des poumons, on ouvre le thorax, qu'on ferme le robinet g, qu'on extrait les poumons de la cage thoracique et qu'on les porte dans la cloche,

la tension de l'air contenu dans les poumons diminue notablement: 1° par refroidissement, 2° par absorption (probable, comme nous l'avons vu) d'oxygène, 3° parce que les poumons pendent alors à la trachée et que l'allongement de celle-ci donne lieu à un agrandissement assez important de sa capacité.

Même dans le thorax, cela est déjà le cas. Lorsqu'on ouvre successivement les deux sacs pleuraux, on obtient pour l'élasticité des poumons une certaine valeur, qui toutefois augmente encore si on coupe les adhérences du feuillet pariétal du péricarde avec le sternum. C'est ainsi qu'on a trouvé pour la force d'élasticité à l'expiration:

	1°	2°
Plèvre droite ouverte	29	30
„ gauche „	31	35
Péricarde détaché du sternum . . .	39	38

Cet accroissement de la force d'élasticité après la section du péricarde est vraisemblablement dû, en majeure partie, à une diminution de capacité de la trachée, la légère pression du cœur sur les poumons jouant peut-être aussi un certain rôle. Lorsqu'on suspend les poumons dans le thorax artificiel, il se produit indubitablement une augmentation de capacité, par suite de laquelle la tension intrapulmonaire diminue d'une manière très sensible. Dans ces conditions, l'aspiration d'une même quantité d'air ne *peut* donc pas donner lieu au même accroissement d'élasticité que dans le thorax réel.

Veut-on décider sûrement si l'accroissement de la pression positive dans la trachée, qu'on observe après l'aspiration d'un certain volume d'air, dépend entièrement de l'accroissement de l'élasticité des poumons, ou en partie aussi de la dilatation et du soulèvement de la paroi thoracique, il faut en premier lieu expérimenter sur *les mêmes* poumons et, pour la comparaison des tensions finales produites par l'aspiration des mêmes volumes d'air dans le thorax naturel et dans le thorax artificiel, avoir soin, bien entendu, de partir dans les deux cas du *même* degré d'expansion.

Pour atteindre ce but, il ne suffit pas de mesurer l'élasticité

des poumons dans le thorax naturel, puis de les porter, après avoir fermé le robinet *g*, dans la cloche *k*. On doit, maintenant que les poumons sont suspendus dans le thorax artificiel, s'assurer d'abord que l'air y possède encore la même tension qu'il avait dans le thorax naturel; en d'autres termes, les poumons doivent être, dans les deux cas, au même degré d'expansion. En opérant ainsi successivement sur les mêmes poumons, on pourra trancher la question de savoir si dans nos expériences, outre l'élasticité des poumons, entrait aussi en jeu la paroi thoracique.

Ayant donc déterminé d'abord, de la manière ci-dessus décrite, en abaissant avec précaution le diaphragme, l'élasticité des poumons à des degrés déterminés d'expansion dans le thorax naturel, je mesurai, par l'ouverture du thorax, l'élasticité des poumons à l'expiration. Après que le robinet *g* eut été fermé, les poumons furent transportés rapidement dans le thorax artificiel et dilatés, par la raréfaction de l'air de la cloche *k*, jusqu'au point où ils possédaient de nouveau la même élasticité que dans le thorax normal après l'expiration, point qu'indiquait le manomètre. On aspira alors des volumes d'air égaux à ceux de la première expérience, et on détermina, aux degrés d'expansion correspondants, l'élasticité des mêmes poumons dans le thorax artificiel. L'accord des chiffres obtenus dans les deux expériences est *parfait*, et cela n'est pas seulement le cas au degré d'expansion dont il a été question jusqu'ici; même quand on aspire une quantité d'air *double*, ou encore plus, on ne constate pas la moindre influence de la paroi thoracique.

Chez le lapin, on trouva ainsi:

Poids du corps, en kilogr.	Air respiratoire, calculé, en c.c.	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression positive dans la trachée après l'inspiration, en mm. d'eau.	Pression positive dans la trachée après ouverture du thorax à l'expiration, en mm. d'eau.	Pression négative totale dans le thorax à l'inspiration, en mm. d'eau.
2.08	15	15	70	35	105
		20	94		129

Les poumons ayant ensuite été transportés dans le thorax artificiel et dilatés jusqu'à ce que leur élasticité s'élevât de nouveau à 35 mm. d'eau, on obtint:

Poids du corps, en kilogr.	Air respiratoire calculé, en c.c.	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression positive dans la trachée après l'inspiration, en mm. d'eau.	Pression positive dans la trachée après ouverture du thorax à l'expiration, en mm. d'eau.	Pression négative totale dans le thorax à l'inspiration. en c.c.
		15			99
		20			127

Le résultat prouve que la paroi du thorax n'est pour rien dans le phénomène. Même quand on aspire un volume d'air de 5 c.c. plus grand, les valeurs obtenues des deux manières, avec les mêmes poumons, ne diffèrent que de 2 mm. d'eau.

Chez le chien, le résultat ne fut pas moins décisif:

8.2	57	60	47	56	103
		100	79		135
		115	87		143
		id.	83		139
		id.	84		140

Les poumons ayant ensuite été transportés dans le thorax artificiel et dilatés jusqu'à ce que leur élasticité s'élevât de nouveau à 56 mm. d'eau, on obtint:

		60			101
		id.			103
		100			129
		id.			133
		115			139
		id.			143
		id.			137

Entre chacune de ces déterminations, les poumons affaissés étaient ramenés à une expansion telle que leur élasticité mesurât 56 mm. d'eau.

En présence de chiffres offrant un accord si satisfaisant, je puis me dispenser de produire d'autres arguments à l'appui de la proposition que lors de l'expansion des poumons, dans mes premières expériences, le manomètre fixé dans la trachée a déterminé *l'élasticité des poumons, et rien qu'elle.* Même en cas d'expansion par un volume d'air deux fois plus grand que la capacité respiratoire déduite du poids du corps, il n'y a pas apparence de soulèvement des côtes chez le chien. L'accord des chiffres montre aussi que, par l'abaissement du diaphragme, l'expansion des poumons s'effectue d'une manière normale. Comme, durant la vie, c'est surtout la partie musculaire du diaphragme qui change de forme et de position, et que naturellement on ne peut imiter ce mécanisme avec la main, il aurait pu arriver que dans mes expériences les poumons fussent dilatés plus ou moins anormalement. Mais lorsque, en dehors du thorax, ils sont suspendus tout à fait librement et peuvent par suite s'épanouir régulièrement, les mêmes chiffres sont obtenus.

La pression positive observée dans la trachée au moment où on lâche le diaphragme exprime donc, dans les limites indiquées, purement et simplement l'élasticité des poumons, et fournit par conséquent *une mesure exacte de la pression négative existant dans la cavité pleurale, en d'autres termes, de la force d'aspiration du thorax.*

L'application de mes mesures aux phénomènes qui se passent durant la vie pourrait soulever encore une objection. Il ne s'agit pas de la tonicité des fibres musculaires organiques que les poumons contiennent. M. Leo Gerlach [1]) a parfaitement montré que ces fibres n'ont pas d'influence, et à cet égard je suis arrivé à la même conclusion que lui. C'est seulement quelques heures après la mort, à l'apparition de la rigidité cadavérique, qu'on

---

[1]) Pflüger's *Archiv*, t. XIII, 1876, p. 491.

observe ordinairement une légère ascension du manomètre, qui indique une diminution de la capacité des poumons, due au raccourcissement des fibres musculaires organiques dans cette période.

L'influence du tonus peut donc être négligée; mais en est-il de même de l'état de réplétion des vaisseaux sanguins? Durant la vie, le riche réseau vasculaire des poumons contient du sang sous une certaine pression, tandis que dans nos expériences ces vaisseaux sont presque exsangues, ou du moins pauvres en sang, de sorte que toute tension y fait défaut. M. d'Arsonval attache à la réplétion des vaisseaux sanguins du poumon une grande importance pour l'élasticité du tissu pulmonaire. Pour apprendre à en connaître l'influence, j'ai empoisonné l'animal par le curare, jusqu'à ce que tout mouvement respiratoire volontaire fût supprimé. La respiration artificielle fut alors entretenue, non pas, comme d'ordinaire, par insufflation d'air dans la trachée, mais, tout comme dans les expériences sur les poumons d'animaux venant d'être tués, par le mouvement imprimé au diaphragme. Dans la trachée on liait l'extrémité ouverte *h*, et on enlevait le robinet *f*. Un manomètre était fixé dans la carotide gauche, donc dans l'aorte, et la pression sanguine était enregistrée. Les nerfs vago-sympathiques avaient été coupés. La pression sanguine restant normale, la main était retirée de la cavité abdominale et le thorax amené par conséquent dans l'état ordinaire d'expiration. De même que cela avait eu lieu sur l'animal mort, une quantité déterminée d'air était maintenant aspirée des tubes communiquants *A* et *B*, et l'élasticité des poumons épanouis était mesurée, comme précédemment, par la pression positive dans la trachée. Les deux chiens soumis à l'expérience pesaient 14,65 et 26,5 kilogr. La capacité respiratoire calculée d'après ces poids est respectivement de 101 et 180 cc. Le tableau suivant indique les volumes d'air aspirés pour l'expansion des poumons et les chiffres trouvés pour l'élasticité correspondante; immédiatement après l'expérience, on ouvrait le diaphragme:

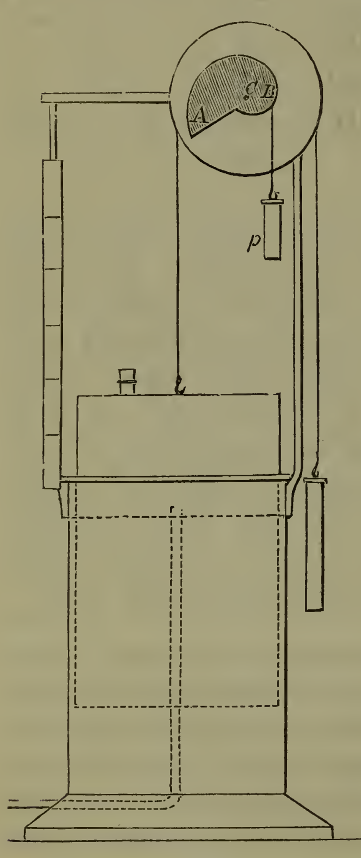
Expé-rience.	Poids du corps, en kilogr.	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression sanguine, en mm. *Hg*.	Elasticité des poumons, en mm. d'eau.	Différence de pression, en mm. d'eau.	Différence de pression, en mm. *Hg*.
12	14.6	100	148	40	40	3.
		id.	162	40		
		200	152	76	73	5.4
		id.	154	70		
		100	156	36		
		0 (Thorax ouvert)	164	51		
17	26.5	180	178	55	55	4.0
		0 (Thorax ouvert)		48		

Dans la seconde expérience, le cœur s'arrêta après la première détermination. Une seconde détermination, faite immédiatement après la mort, donna exactement le même chiffre que la première. Les chiffres obtenus, dans la première expérience, pour l'élasticité des poumons chez l'animal vivant, s'accordent entièrement, comme on le voit, avec ceux qu'on trouve, aux mêmes degrés d'expansion, aussitôt après la mort. La pression du sang dans les vaisseaux pulmonaires n'exerce donc pas non plus d'influence. *De l'élasticité trouvée immédiatement après la mort, on peut donc déduire la pression négative ou force d'aspiration du thorax telle qu'elle est durant la vie.*

Pour obtenir un terme de comparaison, je suis parti, on se le rappelle, de la supposition que la capacité respiratoire du chien et du lapin, dans l'inspiration et l'expiration paisibles, serait environ dans le même rapport avec le poids du corps que chez l'homme. Cette supposition est-elle exacte? Le seul moyen de répondre à cette question est, naturellement, de déterminer les volumes d'air inspirés ou expirés. Cette détermination présente quelque difficulté, parce que la capacité respiratoire est très variable; dès que l'animal se trouve dans des conditions anormales, la capacité normale ne peut plus être

obtenue. L'animal doit être tranquille et calme. Même alors, la respiration, ne se fait normalement que si l'entrée et la sortie de l'air sont tout à fait libres. Du moment qu'il éprouve la moindre résistance, soit à l'inspiration, soit à l'expiration, les volumes d'air déplacés s'éloignent notablement des volumes normaux. Eviter tout obstacle à l'entrée et à la sortie est naturellement impossible, quand il s'agit de mesurer le volume de l'air, mais on doit chercher à se rapprocher de cet idéal, autant que possible.

Fig. 3.



Dans les expériences que je vais communiquer, les animaux respiraient, au moyen de soupapes de Lovén, dans un spiromètre exactement équilibré dans toutes les positions.

Les soupapes de Lovén consistent en petits carrés de baudruche, qu'on humecte de glycérine, pour empêcher la dessiccation. Aux quatre angles, elles sont fixées au-dessus d'une ouverture. Dès que la pression de l'air devient un peu plus forte sur la face inférieure, la membrane prend une forme convexe et laisse passer l'air aux quatre côtés. Si, au contraire, on aspire à la face inférieure, elle ferme l'ouverture. Une embouchure, qui peut être fixée hermétiquement sur la tête de l'animal, porte deux de ces soupapes, disposées en sens inverse, de manière que l'une s'ouvre à l'inspiration et se ferme à l'expiration, tandis que l'autre se ferme à l'inspiration et s'ouvre à l'expiration. A mesure que l'animal

est plus grand, il faut employer une embouchure plus grande, et dans le même rapport doivent aussi être agrandis les soupapes et les tubes de communication.

La soupape désignée en dernier lieu, celle qui s'ouvre à l'expiration, conduit dans un tube relié à un spiromètre. Comme le tambour à air du spiromètre devient plus lourd à mesure qu'il émerge de l'eau, il faut trouver un moyen de compenser par un contre-poids cet accroissement de poids du tambour. Comme le montre fig. 3, on y parvient à l'aide de la pièce appelée limaçon, à laquelle est suspendu le poids *p* et qui elle-même est fixée sur la grande roue. A mesure que le tambour monte, le bras de levier par lequel le poids *p* agit sur la roue devient plus grand, en raison de l'excentricité du limaçon, et on obtient ainsi une compensation parfaite du poids du tambour dans une position quelconque [1]).

Avec chaque chien on fit quelques séries de déterminations, en nombre d'autant plus grand que les chiffres présentaient plus de différences. De ces séries on déduisit une valeur moyenne pour la capacité respiratoire normale, et, en outre, on réunit les maxima et les minima des différentes séries, afin d'en tirer les valeurs maxima et minima moyennes. Un exemple éclaircira ce qui vient d'être dit. La capacité respiratoire d'un chien pesant 6,8 kilogr. fut déterminée ainsi:

La 1ère série, consistant en 15 séries secondaires, chacune de 10 respirations exprimées en c.c., fournit les chiffres suivants:

1200
1350
1100
1250
1200

6100

[1]) De la même manière Panum a mesuré, en 1868, déjà la capacité respiratoire de l'homme. *Pflüger's Archiv*, t. I, p. 125.

6100
1000
1150
1300
1250
1200
1300
1250
1150
1150
1150

18000 divisé par 15, donne 1200 c.c., ou:

120 c.c. pour la valeur moyenne de la capacité respiratoire,
135 " " " " maxima,
100 " " " " minima.

La 2e série donna:

113.3 c.c. pour la valeur moyenne de la capacité respiratoire,
120 " " " " maxima,
95 " " " " minima.

La 3e série fournit:

110 c.c. pour la valeur moyenne de la capacité respiratoire,
120 " " " " maxima,
95 " " " " minima.

Les trois séries furent ensuite combinées, d'où il résulta pour la respiration normale:

comme valeur moyenne 114 c.c.
" " maxima 125 "
" " minima 98 "

Les numéros des expériences indiquent les animaux pour lesquels j'ai donné précédemment la pression négative après l'expansion par le volume d'air déduit du poids du corps.

J'ai trouvé ainsi, chez les chiens:

Expé-rience.	Poids du corps, en kilogr.	Capacité respiratoire calculée, en c. c.	Capacité respiratoire déterminée, en c. c.	Pression positive dans la trachée, en mm. d'eau.	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. d'eau.	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. *Hg*.	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. d'eau.	Pression négative dans le thorax à l'expiration, en mm. *Hg*.	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. d'eau.	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. *Hg*.
3	6.8	47	moy. 114	77	134	10.	57	4.2	77	5.7
			min. 98	67	124	9.2			67	5.
			max. 125	81						
4	7.	50	moy. 120	82	135	10.	53	3.9	82	6.0
			min. 100	74	127	9.4			74	5.5
			max. 140	88						
6	7.5	52	moy. 119	80	132	9.7	52	3.9	80	5.9
			min. 105	71	123	9.1			71	5.3
			max. 137	88						
7	8.2	57	moy. 114	85	141	10.4	56	4.1	85	6.3
			min. 100	79	135	10.			79	5.9
			max. 130							
8	8.5	59	moy. 175	87	140	10.3	53	3.9	87	6.4
			min. 156	75	128	9.5			75	5.6
			max. 199	99						
9	8.8	61	moy. 137	91					91	6.7
			min. 121	82					82	6.0
			max. 158	100						
10	12.3	86	moy. 188	82	134	10.	52	3.9	82	6.0
			min. 160	74	126	9.3			74	5.5
			max. 219	98						
11	14.	97	moy. 235	108	174	12.8	66	4.8	108	8.0
			min. 210	102	168	12.4			102	7.5
			max. 265							
14	21.	146	moy. 320	99	160	11.8	61	4.5	99	7.3
			min. 300	92	153	11.3			92	6.8
			max. 364							

De même que dans les expériences antérieures sur les chiens, les chiffres diffèrent ici plus entre eux chez les animaux dont le poids dépasse 10 kilogr. que chez les individus plus petits.

Ici comme là, les chiffres fournis pour la pression négative par les animaux de moindre taille m'inspirent le plus de confiance, parce que, chez les animaux plus grands, l'expansion des poumons, dans mon appareil, ne pouvait être effectuée avec assez de lenteur et d'uniformité, les ouvertures des divers robinets étant trop petites pour cela. Lors de l'aspiration de grands volumes d'air par ces petites ouvertures, la pression devenait bientôt un peu trop fortement négative, et il ne pouvait donc être entièrement satisfait à l'une des conditions qui sont nécessaires, ainsi que je l'ai dit plus haut, pour obtenir des chiffres exacts. Dans le cas actuel, il y a encore une seconde raison pour laquelle j'attache plus de valeur aux chiffres donnés par les petits individus. C'est que la détermination de la capacité respiratoire normale a également dû être moins exacte chez les animaux plus grands, parce que, pour eux, les soupapes étaient un peu trop petites et que la résistance des soupapes augmente aussi lorsque les volumes d'air déplacés deviennent plus grands. — Pour l'une et l'autre raison, dans ce que j'ai encore à dire de mes résultats, je négligerai les deux dernières déterminations.

Des 7 autres expériences, il résulte que la pression négative totale existant dans le thorax, lorsqu'on aspirait une quantité d'air égale à celle qui avait été trouvée en moyenne pour la capacité respiratoire normale, s'élevait, en moyenne, à 136 mm. d'eau ou 10 mm. *Hg.* — Or j'admets que la valeur moyenne trouvée dans mes expériences pour la capacité respiratoire normale est encore un peu trop forte, une *légère* résistance ayant été éprouvée dans la respiration par les soupapes, et que c'est par conséquent la valeur *minima* de ces expériences qui doit être portée en compte. *En ce cas, chez le chien, la valeur de la pression négative à la fin de l'inspiration serait de* 127 *mm. d'eau ou* 9.4 *mm. Hg.*, *et la différence de pression à l'inspiration et à l'expiration serait donc d'environ* 5.5 *mm. Hg.*

Chez le lapin, il est moins facile d'arriver à la connaissance de la capacité respiratoire normale. Les volumes d'air déplacés

sont si petits, que leur détermination, de la manière décrite pour le chien, m'a semblé peu sûre. En outre, même dans les circonstances normales, la susdite capacité respiratoire paraît être sujette à des fluctuations assez fortes. M. Gad a décrit [1]), en 1879, un pneumatographe reposant sur le même principe que mon appareil, et dont le tambour, léger, très mobile et, bien entendu, équilibré dans toutes les positions, porte un style traceur, qui enregistre les volumes d'air déplacés. De la hauteur de la courbe obtenue avec cet appareil, on peut déduire les volumes d'air inspirés et expirés. Dans le tracé donné par M. Gad pour un lapin du poids de 1,95 kilogr., la hauteur de la courbe correspond à environ 20 c.c. d'air. A la question que je lui avais adressée, pour savoir si la suite de ses recherches avec le pneumatographe avait donné pour la capacité respiratoire d'un lapin d'environ 2 kilogr. une valeur moyenne de 20 c.c., M. Gad eut l'obligeance de répondre qu'un volume d'air de 20 c.c. est situé à la limite supérieure de la capacité respiratoire trouvée par lui dans le cas d'une respiration paisible. „Les valeurs les plus fréquentes'', m'écrit-il, „paraissaient se trouver aux environs de 12 c.c., mais, vu la grandeur des fluctuations, ce nombre lui-même ne doit être employé qu'avec circonspection''.

En cet état de choses, il devient naturellement difficile d'arriver à une conclusion par rapport à la valeur moyenne de la pression négative dans la respiration paisible. Je crois pouvoir admettre, toutefois, que les chiffres obtenus dans les expériences mentionnées p. 324, où la capacité respiratoire a été déduite du poids rectifié du corps, sont trop forts. J'ai encore fait, chez ces mêmes animaux, des déterminations de l'élasticité à des degrés moindres d'expansion; en voici les résultats :

---

[1]) *Archiv f. Physiologie* von Du Bois-Reymond, 1879, p. 181. Pour la description de l'appareil, je dois renvoyer au Mémoire de M. Gad; sans figures, elle serait difficilement intelligible.

	Poids rectifié du corps, en kilogr.	Capacité respiratoire calculée, en c.c.	Quantité de l'air inspiré, en c.c.	Pression positive dans la trachée, en mm. d'eau	Pression négative dans le thorax à l'inspiration, en mm. d'eau	mm. Hg.	l'expiration, en mm. d'eau	mm. Hg.	Différence de pression à l'inspiration et à l'expiration, en mm. d'eau	mm. Hg.
1**	2.66	18.5	10	28	60	4.5	32	2.3	28	2.0
			12	34	66	4.9			34	2.5
2**	2.05	15	10	36	67	5.—	31	2.3	36	2.6
3**	1.81	12.5	10	39	75	5.5	36	2.6	39	2.9
4**	1.77	12	10	44	80	5.9	36	2.6	44	3.2

Pour le lapin, on voit que la valeur de la pression négative qui règne dans le thorax pendant l'inspiration et l'expiration paisibles ne se laisse pas déduire des déterminations communiquées, comme c'était le cas pour le chien. Néanmoins, je pense que nous ne serons pas loin de la vérité en admettant chez le lapin, comme valeurs moyennes, à la fin de l'inspiration une pression négative de 60 à 70 mm. d'eau ou 4,5 mm. *Hg*, et à la fin de l'expiration une pression négative de 30 à 40 mm. d'eau ou 2,5 mm. *Hg*.

Il ressort de nos expériences, au moins en ce qui concerne le chien, que la *valeur absolue* de la pression négative à la fin de l'inspiration et la *différence de pression* à la fin de l'inspiration et de l'expiration sont beaucoup plus grandes qu'on ne l'admettait ordinairement. Si l'on considère que *pendant le mouvement respiratoire* la différence de pression doit être encore plus considérable, il s'ensuit que la variation de la force de succion, de l'inspiration à l'expiration, doit donner lieu à des modifications très importantes du mouvement du sang, tant dans la grande circulation que dans la petite, ainsi que l'ont montré, entre autres, les recherches de M. de Jager.

Ce résultat est en désaccord évident tant avec les chiffres de MM. Adamkiewicz, Jacobson et Rosenthal, obtenus par voie

indirecte, qu'avec les déterminations directes de M. Fredericq, et ce désaccord concerne aussi bien la valeur absolue de la pression négative que la différence de pression entre l'inspiration et l'expiration. Comment expliquer la faiblesse des chiffres trouvés par ces observateurs?

Remarquons, en premier lieu, que toutes leurs communications laissent à désirer, soit par l'insuffisance des détails, soit par le manque de précision. MM. Adamkiewicz et Jacobson se bornent à dire: „Chez les moutons, les chiens et les lapins, nous avons trouvé, sans exception, une pression négative dans le péricarde, lorsque l'expérience avait réussi, c'est-à-dire, lorsque l'autopsie montrait le péricarde perforé, le muscle cardiaque intact ou seulement strié, les poumons et les vaisseaux sans lésion. Dans un grand nombre d'expériences, il ne nous est arrivé que peu d'accidents défavorables. La pression négative oscillait entre — 3 et — 5 mm. *Hg*. En cas de respiration paisible, nous ne l'avons pas vue franchir ces limites, mais bien chez un lapin qui avait été mis artificiellement dans un état de dyspnée violente". M. Fredericq écrit: ,,Les graphiques obtenus montrent que, même dans la respiration profonde, tant qu'elle n'est pas forcée, la pression intrathoracique ne varie que de quelques millimètres de mercure ou d'un petit nombre de centimètres d'eau. J'ai cru inutile de reproduire ici ces graphiques, pour ne pas multiplier le nombre des bois". Et plus loin: „Tant que la respiration s'effectue d'une façon paisible et naturelle, les variations de la pression intrathoracique atteignent à peine quelques millimètres de mercure". Pourquoi M. Fredericq n'a-t-il pas donné simplement les chiffres obtenus, que ce fût en mm. *Hg*. ou en cm. d'eau? Ce même défaut se rencontre aussi, quoique à un degré beaucoup moindre, dans les énoncés de M. Rosenthal. Pour le lapin, il est dit que la pression négative s'élève tout au plus à 3 mm. *Hg*, mais la variation qu'elle éprouve dans l'inspiration et l'expiration paisibles n'est pas mentionnée. Quant au chien, on lit: „quelquefois la pression est un peu plus forte, atteignant jusqu'à — 50 mm. d'eau, et les variations respira-

toires sont chez lui plus étendues que chez le lapin"; quant à l'homme: „la pression négative s'élevait à 40—60 mm. d'eau, c'est-à-dire à une valeur peu supérieure à celle qu'on trouve chez le lapin; les mouvements respiratoires ordinaires ne déterminent que des variations de quelques millimètres".

En ce qui concerne les déterminations de la pression intrapéricardique par MM. Adamkiewicz et Jacobson, j'ai seulement pu les contrôler chez les lapins et les chiens. Pour le lapin, leurs indications ne diffèrent pas notablement des valeurs auxquelles mes expériences ont conduit, mais pour le chien, leurs chiffres, tant ceux de la valeur absolue de la pression négative que ceux de la différence de pression, sont beaucoup plus faibles que les miens. Sur le chien, toutefois, ils n'ont probablement pas fait beaucoup d'expériences, car autrement il ne leur aurait certainement pas échappé que, chez cet animal, la détermination de la pression intrapéricardique est impraticable. Le feuillet pariétal du péricarde se trouve, chez le chien, à une distance relativement grande de la face interne du sternum, et les feuillets pariétaux des plèvres sont, immédiatement derrière le sternum, adossés directement l'un à l'autre, de sorte qu'il est impossible d'arriver, en passant entre ces feuillets, dans le péricarde. On ne peut pas non plus y pénétrer du côté du diaphragme, car, chez le chien, le péricarde pariétal n'est pas adhérent au diaphragme; entre le péricarde pariétal et les deux feuillets pleuraux, il reste chez cet animal, quand le thorax est ouvert, un espace considérable, que parcourt, sur une longueur de quelques centimètres, la veine cave inférieure, qui, à droite, est fixée à la plèvre pariétale.

Chez le chien, MM. Adamkiewicz et Jacobson n'ont donc pas pu mesurer la pression intrapéricardique, et pour le lapin, leurs chiffres s'accordent assez bien avec les résultats obtenus par moi. Lorsqu'il pénètre peu d'air dans le péricarde, comme cela a été le cas, selon toute probabilité, dans leurs expériences, la pression intrapéricardique différera peu de la pression intra-

pleurale, vu que le péricarde est très extensible et n'oppose, dans l'état normal, quand il n'est pas tendu, qu'une faible résistance à la pression ou à l'aspiration qui agit sur lui. C'est ce que démontre indirectement l'expérience suivante. La cavité thoracique étant encore fermée, un manomètre fut fixé dans la trachée. Directement à côté du sternum on ouvrit le péricarde, sans léser la plèvre. La forte expansion de cette membrane se laissait distinctement apercevoir à la face inférieure du diaphragme. Ensuite on ouvrit la plèvre gauche, et enfin la plèvre droite. On trouva ainsi pour la pression positive dans la trachée, en mm. d'eau:

Péricarde ouvert	32
Plèvre gauche ouverte . . .	42
„ droite „ . . .	46 [1])

La susdite disposition anatomique du péricarde explique aussi pourquoi, chez le lapin, la pression positive observée dans la trachée augmente encore d'une couple de millimètres lorsque, après avoir ouvert successivement les deux plèvres, on détache le péricarde, là où il adhère au sternum, ainsi que le montrent les chiffres suivants:

	1.	2.	3.
Plèvre droite ouverte . . .	30	29	30
„ gauche „ . . .	34	31	35
Péricarde détaché	38	39	38

Chez le chien, la section des adhérences entre le péricarde et le sternum n'occasionne pas d'ascension sensible du manomètre fixé dans la trachée, et les différences de pression positive

---

[1]) Le chiffre final de 46 mm. d'eau, pour l'élasticité des poumons du lapin à l'ouverture du thorax, est ici plus élevé que dans le cas où les plèvres seules étaient ouvertes. Par suite de l'ouverture préalable du péricarde et de sa forte dilatation sous l'influence de la pression atmosphérique, les poumons avaient été comprimés et un chiffre plus élevé devait donc être obtenu pour leur élasticité.

qu'on observe dans la trachée en ouvrant successivement les deux sacs pleuraux sont aussi moins considérables, parce que la longue bande qui unit le péricarde au sternum permet ici un plus grand déplacement latéral du médiastin antérieur. Les chiffres obtenus avec le chien sont les suivants:

	1.	2.	3.	4.	5.
Plèvre droite ouverte	51	52	49	61	60
„ gauche „	57	55	51	66	67
Plèvre gauche ouverte	54	49	49		
„ droite „	56	52	50		

Quant aux déterminations de M. Rosenthal, au moyen de la sonde œsophagienne, on pouvait prévoir, comme je l'ai déjà remarqué, qu'elles donneraient des résultats trop faibles. Après avoir coupé, chez un chien, les deux nerfs vago-sympathiques, je déterminai simultanément la pression dans la trachée et dans l'œsophage, les poumons étant dilatés par l'aspiration de différents volumes d'air. La sonde était fixée hermétiquement dans l'œsophage, qui lui-même était fermé au cardia par une ligature. A la fin de l'expérience ou ouvrait le thorax, pour mesurer l'élasticité des poumons dans l'état d'expiration et obtenir ainsi la pression négative totale. Voici quelques-uns des chiffres trouvés:

Volume d'air aspiré, en c.c.	Pression négative, en mm. d'eau. Dans l'œsophage.				Dans le thorax.			
	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.
0	12	10	30	30	67	67	67	67
60	67	65	83	75	132	144	137	135
100	67	101	92	93	179	180	174	179
120		103	91	83		191	188	187

A l'ouverture du thorax, le manomètre fixé dans la trachée indiquait une pression positive de 67 mm. d'eau, tandis que celui de l'œsophage accusait une pression positive de 39 mm. d'eau.

Beaucoup d'autres séries d'expériences pourraient encore être rapportées, si je ne craignais de fatiguer le lecteur. Les chiffres ci-dessus suffisent pour établir qu'on ne peut déterminer par la sonde œsophagienne, même après la mort, la valeur absolue de la pression négative dans le thorax, les résultats ainsi trouvés étant beaucoup trop faibles. Il n'y a même pas égalité entre les chiffres qu'on obtient pour un même degré d'expansion des poumons, car ces chiffres dépendent de l'extension que la paroi œsophagienne a subi antérieurement. Plus on a distendu la paroi de l'œsophage, en déterminant une forte pression négative dans le thorax, plus les chiffres s'élèvent quand les poumons sont ensuite soumis à un moindre degré d'expansion. Après la mort, ils ne peuvent donc pas même être regardés comme une mesure relative, et très probablement il en sera de même durant la vie. L'introduction d'un corps étranger dans l'œsophage influencera sans doute l'innervation de la tunique musculaire, ce qui aura pour effet, non seulement d'abaisser encore plus les chiffres obtenus avec la sonde œsophagienne, mais aussi, vu que cette tonicité réflexe ne sera pas toujours égale, d'empêcher qu'ils ne représentent même, fidèlement, la pression relative.

En tout cas, il est clair que la sónde œsophagienne ne peut donner exactement la valeur absolue de la pression durant la vie, pas plus que la différence de pression qui se produit dans l'inspiration et l'expiration paisibles. Les valeurs trouvées doivent être trop faibles. Sans insister davantage sur ce point, je me bornerai à communiquer encore les chiffres que la sonde œsophagienne m'a fournis chez l'homme. Mon collègue M. Iterson a eu l'obligeance de me mettre dans l'occasion d'exécuter ces déterminations.

La sonde œsophagienne fut d'abord introduite dans l'estomac; dans ces conditions, on observa les oscillations suivantes de la pression positive à l'inspiration et à l'expiration:

Inspiration.	Expiration.
28	25
35	24
42	24
49	35
52	37
67	27

La sonde ayant ensuite été retirée jusque dans l'œsophage, on obtint les chiffres suivants, en mm. d'eau:

— 72	— 60
— 133	— 122
— 140	— 120

A ce chiffre, le manomètre s'arrêta. Le robinet fut alors ouvert et le contact avec l'air établi. On trouva ainsi:

— 72	+ 8
— 80	+ 16
— 60	+ 120
— 80*	— 16*
— 76*	— 16*
— 100	— 24
— 86	+ 40

Ces chiffres expriment approximativement les variations de pression qui se produisirent dans l'œsophage pendant le *mouvement* inspiratoire et expiratoire. Je ne pus obtenir du patient qu'il s'arrêtât tranquillement, pendant un temps appréciable, soit dans l'inspiration, soit dans l'expiration, et les chiffres donnés ne fournissent donc nullement la mesure de la pression qui aurait été trouvée dans ces conditions. J'ai seulement observé, pendant les courts instants qu'il restait dans l'état d'inspiration, que la pression négative dans l'œsophage devenait beaucoup moindre.

Les chiffres marqués d'un astérisque se rapportent à une respiration très paisible.

Restent les déterminations directes de M. Fredericq. Sont-elles, ou non, en contradiction avec mes expériences? De même que lui je n'ai pas trouvé plus de „quelques millimètres" de mercure et „d'un petit nombre de centimètres" d'eau pour la valeur absolue de la pression négative et pour la différence de pression. M. d'Arsonval, d'ailleurs, dans sa détermination directe, a obtenu pour la *différence de pression* à l'inspiration et à l'expiration un chiffre à peu près égal à celui adopté par moi. Je serais en droit d'attacher beaucoup d'importance à ce chiffre de M. d'Arsonval, si les nombres qu'il indique pour la valeur absolue de la pression négative n'étaient pas si élevés. Comment M. d'Arsonval a trouvé pour celle-ci une valeur de 150 à 220 mm. d'eau, c'est ce que je ne m'explique pas, et en conséquence je ne puis attribuer au chiffre qu'il donne pour la différence de pression, bien que ce chiffre soit parfaitement d'accord avec mes propres résultats, aucune force démonstrative. — Des paroles de M. Fredericq, je crois devoir inférer qu'il adopte des chiffres plus bas, tant pour la valeur absolue de la pression négative, que pour la différence de pression. Quoique ne touchant pas la question de savoir si par la sonde œsophagienne la valeur absolue de la pression négative peut être déterminée ou non, il a pourtant enregistré la respiration au moyen de cette sonde et il en donne même des tracés. Ses conclusions sont aussi en harmonie avec ces graphiques.

Ainsi que je l'ai déjà remarqué au début, il ne me paraît pas possible de déterminer directement la valeur de la pression négative dans le thorax à l'inspiration et l'expiration paisibles. Moi-même j'ai fait à l'origine quelques expériences sur l'animal vivant, mais j'ai bientôt abandonné cette voie, parce que la respiration éprouvait trop de trouble. Il y a d'ailleurs encore un autre inconvénient. La respiration du chien est, comme nous l'avons vu, éminemment abdominale, et pour cette raison la valeur de la pression ne peut être convenablement mesurée à la paroi costale, parce que le poumon lui-même ferme la canule. On devrait introduire le long de la paroi tho-

racique et du diaphragme un tube muni d'ouvertures latérales, pour être sûr qu'on détermine exactement la pression négative dans le thorax. La faiblesse des chiffres obtenus par MM. Adamkiewicz et Jacobson, qui, comme nous l'avons vu, ont mesuré, chez le chien, non pas la pression intrapéricardique, mais la pression intrapleurale, me paraît due à cette occlusion de la canule. Qu'elle se produit au moins fréquemment, c'est ce dont je me suis assuré sur l'animal mort, lorsque, voulant savoir si le soulèvement des côtes contribuait à surélever mes chiffres, — avant que j'eusse appris à connaître la cause de la différence initialement observée, à des degrés d'expansion en apparence égaux, dans le thorax naturel et dans le thorax artificiel, — je déterminai simultanément la pression positive dans la trachée et la pression négative dans la cavité pleurale. Souvent les chiffres concordaient parfaitement entre eux, mais souvent aussi il en était autrement, parce que tantôt la canule était bouchée par le poumon, tantôt elle ne l'était pas.

Or, comme il semblait malaisé d'introduire la canule de telle sorte qu'elle mesurât la valeur réelle de la pression négative, et comme en outre il y a si peu de chances que l'animal respirera normalement, j'ai renoncé à toute tentative ultérieure de déterminer la pression négative directement dans le thorax. La méthode indirecte, que j'ai suivie, m'a paru préférable sous tous les rapports.

Ma conviction à cet égard a été fortifiée par les résultats de M. Weil, dont la monographie du pneumothorax [1]) m'est parvenue, comme je l'ai dit dans une note au bas de la p. 314, lorsque le présent travail était déjà entre les mains du compositeur et en partie imprimé. M. Weil s'y est pris un peu autrement pour déterminer la pression négative dans le thorax. Après que la peau a été incisée, une canule conique, en verre, est poussée à travers les muscles et la plèvre. Lorsque l'orifice

---

[1]) A. Weil, *Zur Lehre vom Pneumothorax, insbesondere vom Pneumothorax bei Lungenschwindsucht*, 1882.

de cette canule a une paroi mince et n'est pas trop petit (1 à 2 mm. de diamètre), on réussit à pénétrer dans le sac pleural, sans que la canule soit bouchée et sans que de l'air s'introduise le long de la canule dans la plèvre. Sur cette canule se trouvent, à 1—2 cm. de la pointe, quelques rainures annulaires. Des fils, passés dans la peau de l'animal et maintenus dans ces rainures, fixent la canule. L'autre extrémité de la canule est reliée par un tube de caoutchouc à une pièce en T, dont l'un des bras conduit à un manomètre, tandis que l'autre peut être fermé ou mis en communication avec un réservoir, pour réaliser les différentes formes de pneumothorax — pneumothorax ouvert, pneumothorax à soupape et pneumothorax fermé. Pour la détermination de la pression négative intrathoracique dans les circonstances normales, ce second bras est fermé. En opérant ainsi, il pénètre naturellement un peu d'air dans la cavité pleurale, mais la quantité en est minime. Cette méthode a l'avantage que le poumon ne remplit plus entièrement le sac pleural et ne peut donc pas boucher l'ouverture de la canule; par contre, elle présente l'inconvénient que les conditions ne sont plus tout à fait normales.

M. Weil a trouvé ainsi, chez le lapin, en mm. d'eau:

Expérience.	Poids du corps, en kilogr.	Côté opéré.	Pression négative à l'inspiration.	Pression négative à l'expiration.	Différence de pression.
1.	1.39	droit.	90	—	—
2.	1.53	„	120	10	110
3.	1.55	„	40	30	10
4.	1.67	„	50	10	40
5.	1.68	gauche.	60	10	50
6.	1.82	droit.	70	20	50
7.	—	„	60	10	50
8.	—	„	50	20	30

Chez le chien, l'expérience fut faite de la même manière. Les animaux devaient être narcotisés par la morphine, sans quoi il était entièrement impossible d'enregistrer la respiration et de déterminer la pression. Les chiffres obtenus sont les suivants:

Expé-rience.	Poids du corps, en kilogr.	Côté opéré.	Pression négative à l'inspiration.	Pression négative à l'expiration.	Différence de pression.
1.	4.60	droit.	90	—	—
2.	4.80	"	120	—	—
3.	8.	"	70	20	50
4.	12.80	"	85	65	20
5.	12.85	"	110	80	30
6.	43.	"	140	110	30

M. Weil résume ces résultats de la manière suivante. Pour le lapin, la valeur moyenne tirée des 8 expériences est, pour la pression négative à l'inspiration, 67 mm. d'eau, pour la pression négative à l'expiration, 16 mm., et pour la différence de pression, 49 mm. Pour le chien, d'après les 6 expériences communiquées, les valeurs moyennes sont: 102 mm. à l'inspiration, 46 mm. à l'expiration et 32 mm. pour la différence de pression.

Je n'ai pas saisi bien clairement, par la description de M. Weil, quelle est la signification des chiffres des tableaux ci-dessus, c'est-à-dire, s'ils représentent les valeurs *moyennes* de chaque expérience. Même en admettant qu'il en soit ainsi, on voit suffisamment, par les grandes différences qui existent entre les différentes déterminations, qu'on ne peut en déduire, au moins pour l'objet que nous avons en vue, des valeurs moyennes; la méthode indirecte, suivie par moi, est évidemment préférable.

Quelles sont maintenant, chez l'homme, les valeurs de la

pression négative absolue et de la différence de pression dans l'inspiration et l'expiration paisibles? Une réponse précise ne pourra être faite à cette question qu'à la suite de déterminations directes sur l'homme. Néanmoins, je crois pouvoir indiquer déjà, par à peu près, à quels chiffres ces valeurs s'élèveront probablement.

Le lecteur aura sans doute été frappé, comme moi, de la circonstance que les valeurs trouvées pour le chien sont sensiblement égales entre elles, malgré des différences notables dans le poids du corps. Il semble que la taille de l'animal n'exerce que très peu d'influence. On ne peut toutefois tirer une conclusion des expériences sur le chien, car l'âge et le genre de vie de ces animaux peuvent avoir différé beaucoup, et il y a même lieu d'admettre que les plus grands non seulement étaient plus vieux, mais avaient aussi été soumis longtemps, comme animaux de trait, à un travail pénible. Seulement en ce qui concerne le chien de l'expérience 11, je savais qu'il n'était âgé que d'un an et n'avait pas travaillé; la pression négative à l'expiration fut trouvée chez lui plus forte que chez les autres sujets, savoir, égale à 66 mm. d'eau. Dans les deux expériences mentionnées à la p. 344, sous les numéros 4 et 5, les animaux étaient aussi relativement jeunes et la valeur absolue de la pression négative élevée, savoir, 66 et 67 mm. d'eau. L'âge parait donc avoir réellement de l'influence.

Mais en est-il de même de la taille? Pour obtenir quelques notions à cet égard, j'ai déterminé chez la vache et chez le veau, qui tous deux vivent dans les mêmes conditions favorables, la valeur de la pression négative à l'expiration. Des déterminations analogues ont déjà été faites, en 1819, par Carson [1]), mais d'une manière défectueuse. Un ballon de verre d'environ 2 litres de capacité, partiellement rempli d'eau, portait vers le haut un tube, qu'on fixait dans la trachée. Au bas du ballon était adapté un autre tube, auquel on pouvait donner

[1]) *On the elasticity of the lungs*; dans *Philos. Trans.* 1820, t. I, p. 29.

une position verticale, et qui était rempli d'eau, jusqu'à une certaine hauteur au-dessus du niveau du liquide à l'intérieur du ballon. Lorsque le thorax était ouvert, Carson observait si l'eau montait ou descendait dans le tube vertical, d'où il déduisait, approximativement, la force élastique des poumons. Il trouva ainsi des chiffres extrêmement élevés, 400 à 500 mm. d'eau, pour l'élasticité des poumons chez la vache et le veau, immédiatement après la mort. Un chat et un chien, qui avaient été tués la veille, lui donnèrent également des nombres très élevés. M. Milne Edwards [1]), qui mentionne ces expériences, rapporte qu'il a toujours obtenu des valeurs beaucoup plus faibles que celles de Carson; il parle aussi, mais sans citer de chiffres, de déterminations analogues faites par Bérard. Ce que Carson a proprement déterminé n'est pas facile à inférer de son Mémoire. Peut-être la cause des hauts chiffres qu'il a trouvés doit-elle être cherchée uniquement dans la circonstance que, pour ses déterminations, „les bœufs étaient couchés sur le dos, l'épaule élevée un peu au-dessus du reste du corps''. Dans cette position, l'énorme panse de l'animal peut avoir tiré le diaphragme en bas, de sorte que Carson aurait mesuré la pression négative, non pas dans l'état d'expiration, mais dans celui d'inspiration. Mes expériences, du moins, ont donné des résultats beaucoup plus faibles. L'animal mort étant couché tout à fait horizontalement sur le dos, je déterminai la pression positive dans la trachée, après que la cavité abdominale eut été ouverte. Ensuite, le boucher détacha l'épiploon et refoula l'estomac vers le bas. Le diaphragme devint ainsi entièrement libre et, après que le manomètre eut été ramené à 0, le diaphragme fut ouvert, d'abord à droite, puis à gauche, ou vice-versa. L'ouverture de la paroi abdominale donna lieu, dans la trachée, tantôt à une légère pression négative, tantôt à une légère pression positive, mais l'ouverture du diaphragme fournit des chiffres très constants pour la pression négative, tant chez

---

[1]) *Leçons sur la physiologie et l'anatomie comparée*, t. II, p. 426.

la vache que chez le veau. Le poids du corps fut estimé par le boucher, pour la vache, dans l'expérience 1, à 520, dans l'expérience 2, à 480, et dans l'expérience 3, à 575 kilogrammes; pour le veau, dans l'expérience 1, à 115, et dans l'expérience 2, à 92 kilogr. Je trouvai pour la pression négative dans le thorax, à l'état d'expiration, en mm. d'eau:

	Chez la vache.		Chez le veau.	
	1.	2.	1.	2.
Plèvre droite ouverte	109	90	67	66
„ gauche „	122	108	84	82
	3.			
Plèvre gauche ouverte	106			
„ droite „	120.			

Chez le veau, les chiffres sont plus bas que chez la vache, et chez la vache du poids le plus faible, celle de l'expérience 2, les chiffres sont aussi moins élevés que chez les deux autres. Peut-on en conclure que la taille de l'animal exerce de l'influence, ou bien y a-t-il d'autres facteurs en jeu? C'est ce que je n'ose décider.

Pour l'homme, nous possédons encore, outre les déterminations de M. Donders, celles de M. Perls [1]). Le premier, ainsi que nous l'avons vu, a trouvé pour la force élastique des poumons humains à l'état d'expiration, comme valeur maxima, 70 mm. d'eau; le second 66 mm. A la vérité, ni dans les expériences de l'un, ni dans celles de l'autre, les poumons n'étaient parfaitement indemnes; mais M. Hutchinson, chez un homme de 29 ans, à poumons sains, a trouvé à peu près la même valeur, savoir, 61 mm. d'eau ou 4,5 mm. *Hg*. Tant qu'on ne possédera pas de nouvelles déterminations, le chiffre de M. Hutchinson devra être admis, me semble-t-il, comme valeur moyenne de la pression négative intrathoracique à l'expiration [2]).

---

[1]) *Ueber die Druckverhältnisse im Thorax bei verschiedenen Krankheiten*, dans: *Deutsches Archiv f. klin. Medicin*, 1869, t. VI, p. 1.

[2]) Ainsi que je l'ai déjà indiqué, p. 306, il me paraît probable que durant la vie, lors de l'expiration dans l'attitude debout, chez l'homme et chez

Par l'insufflation de 500 c.c. d'air, cette pression négative, dans l'expérience de M. Hutchinson, aurait probablement été portée à 102 mm. d'eau, ainsi que je l'ai dit antérieurement, et la différence de pression aurait donc été de 41 mm. d'eau, ou 3 mm. *Hg.* Ce chiffre, toutefois, est vraisemblablement un peu trop faible, parce que l'élasticité des poumons augmente le plus lors de l'expansion par les premiers centimètres cubes d'air.

J'espère que d'autres expérimentateurs, placés dans des circonstances favorables, décideront jusqu'à quel point cette hypothèse se vérifie, en faisant la détermination, par la méthode que j'ai décrite, chez l'homme immédiatement après la mort. Dans ce cas, je prierai qu'on ne perde surtout pas de vue les conditions indiquées, dont dépend entièrement la réussite de l'expérience, c'est-à-dire l'obtention de chiffres exacts.

---

les animaux, le diaphragme ne s'élèvera pas aussi haut qu'après la mort, dans le décubitus dorsal et la cavité abdominale ouverte. Le chiffre qu'on obtient pour l'élasticité des poumons, à l'état d'expiration, après la mort, serait, en ce cas, trop faible Surtout chez les herbivores, l'influence des viscères abdominaux sur la position du diaphragme sera, je crois, assez importante.

RECHERCHES THERMOCHIMIQUES SUR L'OZONE,

PAR

E. MULDER et H. G. L. VAN DER MEULEN.

Pour la détermination de la valeur thermochimique de OO,OO,OO, ou, autrement dit, de la quantité de chaleur en calories devenant latente quand on transforme 3 OO en 2 OOO, c'est à dire 3 molécules d'oxygène ordinaire en 2 mol. d'ozone (non compris la chaleur de condensation moléculaire, voyez plus bas) nous sommes partis antérieurement [1]) de l'équation $As_2\,O_3$ Aq, OO — $As_2\,O_3$ Aq, 2 OOO = OO, OO, OO. La valeur de As_2O_3Aq, 2 OOO (la chaleur de combinaison de deux atomes d'oxygène, provenant de deux molécules d'ozone, avec une molécule d'acide arsénieux dissous dans l'eau, en formant de l'acide arsénique [2])) peut être déterminée par une expérience directe, ce qui n'est pas le cas pour celle de $As_2\,O_3$ Aq, OO.

De même que M. Berthelot, nous avons pris pour cette valeur 78280 C, mais avec l'intention d'y revenir plus amplement, car la valeur OO, OO, OO est déterminée en grande partie par celle de $As_2\,O_3$ Aq, OO. On pourrait même se demander si la valeur de $As_2\,O_3$ Aq, OO rentre dans le domaine de l'observation. Avant de passer à la communication d'une nouvelle série d'observations sur la détermination de la valeur de As_2, O_3 Aq, 2 OOO, nous essaierons de résoudre la question soulevée.

---

1) *Versl. en Meded. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch.* 2e Série, XVI, p. 286.

2) *l. c.*

Sur la valeur calorimétrique de $As_2\,O_3\,Aq, OO$.

D'abord nous ferons la remarque, qu'il ne faut point perdre de vue, que l'expression thermochimique $As_2\,O_3\,Aq, OO$ a une tout autre signification que celle de $As_2\,O_3\,Aq, 2\,O$. En effet, la dernière représente la chaleur de combinaison de deux atomes d'oxygène libres avec $As_2\,O_3\,Aq$, tandis que la première se rapporte à une molécule d'oxygène ordinaire. Or l'on croyait pouvoir déterminer indirectement la valeur de $As_2\,O_3\,Aq, OO$ en oxydant une solution aqueuse d'acide arsénieux au moyen d'acide iodique et en se servant en même temps de plusieurs autres constantes (voyez plus bas). C'est de cette manière, que Thomsen [1]) crut pouvoir adopter pour la valeur de $As_2\,O_3\,Aq, OO$ 78360 c, tandis que Favre et Silbermann [2]) donnèrent 78200 c.

Pour répondre à la question, jusqu'à quel point peut être déterminée la constante de $As_2\,O_3\,Aq, OO$, il faut d'abord faire attention à celle de $As_2\,O_3\,Aq, 2\,O$; la raison en sera donnée plus tard. Pour trouver la valeur de $As_2\,O_3\,Aq, 2\,O$ au moyen de l'acide iodique, il faut avoir cinq équations thermochimiques, à savoir:

1) $2\,IO_3HAq, 3\,As_2O_3Aq = 3\,(As_2O_3Aq, 2\,O) - 2\,IHAq, 3\,O)$.
2) $IHAq, 3\,O = I, 3\,O, H, Aq - I, H, Aq$.
3) $5\,IHAq, IO_3HAq = 3\,(2H,O) - 5\,(I,H,Aq) - I, 3\,O,H,Aq + 3(I, I)$.
4) $IKAq,Cl = Cl,H,Aq - I,H,Aq + KOHAq,HClAq - KOHAq,HIAq$.
5) $Cl, H, Aq = Cl, H + Cl\,H, Aq$.

On peut déterminer directement par l'expérience:

$2\,IO_3HAq, 3\,As_2O_3Aq$.
$5\,IHAq, IO_3HAq$.
$KOHAq, HClAq$.
$KOHAq, HIAq$.

L'observation ne donne pas directement:

$IKAq, Cl$
Cl, H
$2\,H, O$.

[1]) *J. f. pr. Chem.*, XI, p. 147, 177.
[2]) *J. de Pharm. Chim.*, XXIV, p. 24 (Nous n'avons pas lu ce mémoire).

Il y a encore d'autres valeurs, telles que 3 IHAq, 3 O etc., qui ne se prêtent pas à une détermination directe par l'expérience, mais elles peuvent être déduites de valeurs précédentes (voyez plus bas).

Posons, pour abréger :

$$2\,IO_3HAq,\ 3\,As_2O_3Aq = a$$
$$5\,IHAq,\ IO_3HAq = b$$
$$KOHAq,\ HClAq = d$$
$$KOHAq,\ HIAq = e$$
$$ClH,\ Aq = f$$
$$IKAq,\ Cl = z$$
$$Cl,\ H = y$$
$$2\,H,\ O = x,$$

alors l'équation 5 devient:

5) $Cl,\ H,\ Aq = y + f$;

de même on a pour l'équation 4:

4) $z = y + f - I,\ H,\ Aq + d - e$;

pour 3:

3) $b = 3x - 5\,(y + f + d - e - z) - (I, 3O, H, Aq) + 3(I, I)$;

pour 2:

2) $IHAq,\ 3\,O = 3\,x - 5\,y - 5\,f - 5\,d + 5\,e + 5\,z - b$
$-(y + f + d - e - z) + 3\,(I, I) = 3\,x - 6\,y - 6\,f - 6\,d +$
$+ 6\,e + 6\,z - b + 3\,(I, I)$;

et enfin:

1) $a = 3\,(As_2O_3Aq, 2\,O) -$
$- 2\,(3\,x - 6\,y - 6\,f - 6\,d + 6\,e + 6\,z - b) + 6\,(I, I)$.

Par conséquent on a :

$As_2O_3Aq, 2O - \frac{1}{3}a + 2x - 4y + 4z - 4f - 4d + 4e - \frac{2}{3}b + 2(I,I)$.

---

[1]) *Scheikundige Aanteekeningen van* E. Mulder (1871). II. p. 186 et suiv.

Les valeurs de x, y et z peuvent être déterminées théorétiquement [1]) de la manière suivante:

$$2HH, OO = 2\,(2\,H, O) - O, O - 2\,(H, H)$$
$$HH, Cl\,Cl = 2\,(H, Cl) - Cl, Cl - H, H$$
$$2\,IKAq, ClCl = 2\,(IKAq, Cl) - Cl, Cl.$$

On en déduit les valeurs de $x = 2\,H, O$, de $y = H, Cl$ et de $z = IKAq, Cl$ comme suit:

$$2\,H, O = \tfrac{1}{2}\,(2\,HH, OO) + \tfrac{1}{2}\,(O, O) + H, H$$
$$H, Cl = \tfrac{1}{2}\,(HH, ClCl) + \tfrac{1}{2}\,(Cl, Cl) + \tfrac{1}{2}\,(H, H)$$
$$IKAq, Cl = \tfrac{1}{2}\,(2\,IKAq, ClCl) + \tfrac{1}{2}\,(Cl, Cl).$$

Ecrivons, pour abréger:

$$\left.\begin{array}{r} 2\,HH, OO = m \\ HH, ClCl = p \\ 2\,IKAq, ClCl = q \end{array}\right\}$$ pouvant tous être déterminés directement par l'observation,

et substituons les valeurs de $2\,x$, $-\,4\,y$ et $+\,4\,z$ dans l'équation 1, alors on obtient (puisque $2x - 4y + 4z = m - 2p + 2q + O, O$):
$As_2O_3Aq, 2O = \frac{1}{3}a - 4f - 4d + e - \frac{2}{3}b + m - 2p + 2q + O,O + 2(I,I)$
et, en y substituant les valeurs primitives de a, b etc.:

$$As_2O_3Aq, 2\,O = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{3}\,(2\,IO_3HAq, 3As_2O_3Aq) - 4ClH, Aq) \\ -4(KOHAq, HClAq) + 4(KOHAq, HIAq) \\ -\tfrac{2}{3}\,(5\,IHAq, IO_3HAq) \\ +2\,HH, OO - 2\,(HH, ClCl) \\ +2\,(2\,IKAq, Cl\,Cl) + O, O + 2\,(I, I). \end{array}\right\} \text{(I).}$$

La valeur de O, O (ne pouvant être déterminée directement) suit de l'équation:

$$As_2O_3Aq, 2\,O - O, O = As_2\,O_3Aq, OO\,.\;.\;.\;.\;.\;\text{(II).}$$

Cette valeur de O, O, introduite en (I), donne enfin l'équation:

$$As_2O_3Aq, OO = \left\{\begin{array}{l} 2\,HH, OO - 2\,(HH, ClCl) \\ +4\,(KOHAq, HIAq) - 4(KOHAq, HClAq \\ +\tfrac{1}{3}\,(2\,IO_3HAq, 2\,As_2O_3Aq) \\ -\,4\,(ClH, Aq) + 2\,(2\,IKAq, ClCl) \\ -\,\tfrac{2}{3}\,(5\,IHAq, IO_3HAq) + 2\,(I, I). \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Adoptant :

$$2\,HH, OO = 13687c$$
$$HH, ClCl = 44002$$
$$KOHAq, HIAq = 13675$$
$$KOHAq, HClAq = 13744$$
$$2\,IO_3HAq, 3\,As_2O_3Aq = 149975$$
$$ClH, Aq = 17314$$
$$2\,IKAq, ClCl = 52418$$
$$5\,IHAq, IO_3HAq = 83332,$$

la valeur de As_2O_3Aq, OO deviendra :

$$As_2O_3Aq, OO = 78607c + 2\,(I, I).$$

Or M. Thomsen a trouvé pour la valeur de As_2O_3Aq, OO 78360c, Favre et Silbermann ont trouvé 78200c ; donc en moyenne 78280c, valeur adoptée par M. Berthelot. Outre la chaleur d'oxydation de l'acide arsénieux dissous dans l'eau par l'acide iodique, c'est à dire la constante de $2\,IO_3HAq, 3\,As_2O_2Aq$, on a besoin de huit constantes pour la détermination de la valeur de As_2O_3Aq, OO, ainsi qu'on le voit par l'équation (III).

Ce que nous avons dit ci-dessus suffira, nous l'espérons, pour faire ressortir — c'était justement le but de ce développement thermochimique, omis jusqu'ici — que la constante de l'expression As_2O_3Aq, OO ne peut pas être déterminée, sans avoir recours à quelque supposition, attachant une signification plus théorique aux valeurs numériques données.

Pour être plus complets, nous ferons remarquer qu'on peut donner différentes formules de structure à l'acide iodique, telles que :

```
                    O
                    ||
O = I = O,   O = I = O,   I — O — O — O H, etc.,
    |               |
    O — H           H
```

et que chacun des trois atomes d'oxygène ne donnera pas la même quantité de cal. en oxydant (voyez les équations 1 et 3). Cependant les atomes d'oxygène, produisant l'oxydation dans les équations 1

et 3 (deuxième membre), représentent des atomes d'oxygène libres et par conséquent indépendants de la chaleur de combinaison de chacun de ces atomes cédés par l'acide iodique; nous croyons donc, qu'en effet les équations données peuvent être considérées comme justes.

Seconde série de déterminations de la constante de As_2O_3Aq, 2 000.

Méthode. Nous avons introduit les modifications suivantes:

1. Les tubes en verre, conduisant l'oxygène ozonifié au ballon calorimétrique, n'étaient pas réunis ensemble au moyen de cire à cacheter (méthode de Berthelot), mais leurs extrémités étaient taillées de sorte qu'elles s'enfonçaient l'une dans l'autre, autant que cela était nécessaire.

2. Le ballon calorimétrique était d'un poids beaucoup moindre, en vue de diminuer la valeur en eau du verre.

3. En joignant le réservoir en verre, contenant l'oxygène ozonifié, à un autre, au moyen d'un tube de verre (muni d'un robinet en verre), nous étions en état de conduire une quantité relativement forte du mélange gazeux dans le ballon calorimétrique et d'obtenir par conséquent une élévation de température d'environ un degré Celsius.

4. Nous avons employé un plus grand nombre de tubes capillaires, dans le but d'accélérer l'union de l'ozone avec l'acide arsénieux dans le ballon calorimétrique.

5. Nous nous sommes servis d'un autre thermomètre pour le ballon cal. que précédemment.

De plus nous avons recherché si l'air, conduit par le ballon cal. vers la fin de l'expérience, afin de mêler le liquide dans le ballon (*pendant* l'expérience ceci se fait par l'oxygène ozonifié entrant) et d'éloigner l'ozone du ballon et du tube adducteur, exerçait quelque influence thermique. Du reste il y avait encore de l'intérêt à le savoir, parce que pendant l'expérience même il pouvait entrer de l'air, à cause de l'aspiration et par une fermeture insuffisante des joints des tubes et des robinets et du

bouchon du ballon; cet air, en se mêlant à l'oxygène ozonifié, pourrait entrer dans la solution contenue dans le ballon cal. (dans lequel il y aura du reste toujours un peu d'ozone, car on peut bien admettre que tout l'ozone n'est pas détruit par l'acide arsénieux). Il serait donc possible qu'il se formât un peu d'acides azotique et azoteux, causant des fautes appréciables. Cette expérience de contrôle fut faite de la manière suivante.

L'air ordinaire (non purifié) fut emprisonné dans un réservoir en verre placé auprès d'un autre réservoir contenant l'oxygène ozonifié. Dans le ballon cal. on versa de l'eau distillée; d'abord on y fit entrer de l'air (en employant les tubes capillaires et l'aspirateur), puis de l'oxygène ozonifié et ensuite de nouveau de l'air, en observant la température du ballon. Le résultat fut qu'en faisant parcourir de l'air pendant 4 minutes, la température resta à 19°,70; en faisant entrer le courant d'oxygène ozonifié pendant 3 minutes, elle se maintint et ne changea pas pendant 20 minutes, temps après lequel on rétablit le courant d'air ordinaire. Il est clair qu'on ne nota pas la température avant qu'une certaine quantité d'air ne fût introduite et que la température ne fût devenue constante. Elle fut par exemple évaluée à 19°,7025 un peu avant d'être notée, mais s'abaissa bientôt à 19°,7. Nous n'avons pas besoin d'ajouter que nous avons pris beaucoup de précautions quant au calorimètre.

Les résultats de l'expérience décrite sont donc:

a. Qu'en admettant que la formation des acides azoteux et azotique ait lieu effectivement, elle n'a aucune influence sensible. Du reste, nous nous sommes assurés, en laissant de l'oxygène ozonifié longtemps en contact avec une quantité relativement grande d'air atmosphérique, que l'ozone ne se combine pas avec l'azote, même en présence de l'eau, ainsi qu'il avait déjà été démontré par M. Carius et aussi par M. Berthelot.

On serait en droit de nous demander pourquoi nous n'avons pas pris de l'oxygène au lieu d'air. La raison en est, en premier lieu, que l'oxygène préparé de la manière ordinaire par le chlorate de potassium (mélangé avec de l'oxyde de cui-

vre) contient presque toujours un peu de chlore (quelquefois même la réaction avec le papier à l'iodure de potassium est très-manifeste). L'oxygène employé dans la préparation de l'ozone fut non seulement séché par l'acide sulfurique, mais en outre conduit par un tube contenant de la chaux sodée. Dans la préparation de l'oxygène en grand, cette purification des traces de chlore est assez pénible; ce ne serait pourtant pas une difficulté prépondérante, si ce n'était que l'oxygène est presque toujours mélangé avec un peu d'air, entr'autres comme conséquence d'une fermeture insuffisante, ce qui est excessivement difficile à éviter.

Mais revenons à notre expérience. Elle nous apprend encore:

b. que l'influence thermique de l'ozone et de l'eau est insignifiante, à ce qu'il paraît.

c. que le bouchon du ballon calorimétrique ne semble pas non plus exercer quelque influence sur la température du liquide. Rappelons encore, pour être plus intelligibles (voyez la 1e Partie de ce travail (extrait) dans le *Rec. d. trav. chim. d. Pays-Bas*, n°. 2), que le ballon cal. est muni d'un bouchon par lequel passent les tubes adducteurs et abducteurs pour l'oxygène ozonifié, et un large tube de verre dans lequel le thermomètre est fixé au moyen d'un petit bouchon. Ce dernier tube plonge dans le liquide; l'ozone n'arrive donc jamais en contact avec le petit bouchon; mais il en sera tout autrement pour le grand bouchon, car, comme d'ordinaire tout l'ozone n'est pas décomposé, il viendra en contact avec lui; or, on sait que l'ozone attaque le liège, le blanchit et forme de l'eau. Cependant le bouchon du ballon cal. ne fut pas attaqué, au moins à en juger à l'œil; il n'est donc pas trop hasardé d'admettre qu'il y a eu très peu d'ozone en contact avec le bouchon. On ne pourrait nier cependant qu'une fermeture tout à fait en verre ne fût préférable, quoiqu'elle donnerait lieu à des difficultés assez grandes dans le maniement de l'appareil. Après quelques efforts nous avons réussi à obtenir une pareille fermeture, mais nous n'avons pas encore expérimenté avec elle.

Expériences. Avant de passer à la communication de nos observations thermochimiques sur l'ozone et l'acide arsénieux, nous entrerons dans quelques détails. Dans le dosage, on a pesé la solution d'acide arsénieux et mesuré celle de l'iode dans l'iodure de potassium, comme nous l'avons indiqué antérieurement dans deux des trois expériences. 0,245 gr. d'acide arsénieux, dissous dans l'eau (sans acide chlorhydrique) jusqu'à un poids de 53.5575 gr., formaient la solution normale, avec laquelle on déterminait la valeur de la solution de l'iode. Au moyen de cette dernière fut dosée la quantité d'acide arsénieux contenu dans la solution destinée à être versée dans le ballon calorimétrique.

Pour contrôler autant que possible la pureté de l'acide arsénieux employé dans la préparation de la solution normale, l'iode fut purifié, comme dans la première série d'expériences [1]), par sublimation (mélangé d'abord avec de l'iodure de potassium). 1.27 gr. de l'iode ainsi purifié furent dissous dans l'eau à l'aide de l'iodure de potassium jusqu'à un volume de 500 c.c. 9.4675 gr. de la solution normale d'acide arsénieux exigeaient 43.82 c.c. de cette solution d'iode. Selon la théorie, 9.4675 gr. de la solution normale auraient exigé 43.74 c,c. de la solution iodique (à supposer que l'acide arsénieux et l'iode fussent absolument purs); or un meilleur accord n'est pas à attendre. Inutile d'ajouter que nous avons employé le chiffre de 43.82 c.c.

Tandis que dans la première série d'expériences le poids du ballon cal. montait à 121.122 gr., il ne fut dans celle-ci que de 81.7 gr.

Le nombre de calories se rapportant à As_2O_3Aq, 2 000 fut calculé selon la formule (précédemment communiquée [2])).

$$R = \frac{2m}{f}(b+p)\,q\,,$$

dans laquelle

b. représente la quantité de la solution dans le ballon cal., exprimée en grammes.

---

[1]) *l. c.*, p. 5. [2]) *l. c.*, p. 5).

p. la somme des valeurs en eau du thermomètre, de l'appareil à absorption et du ballon.

q. la différence en degrés Celsius de la solution avant et après l'expérience.

f. la quantité d'ozone en grammes détruit par l'acide arsénieux contenu dans le ballon.

m. le poids moléculaire de l'ozone: OOO = 48.

R. le nombre de calories calculé pour As_2O_3Aq, 2 OOO.

La chal. spéc. de la solution fut prise = 1; mais strictement ce n'est pas le cas, comme l'on sait, non seulement à cause de la présence des acides arsénieux et arsénique, mais pas même pour l'eau elle-même.

Dans nos expériences nous avions:

	b.	*p*.	*q*.	*f*.	R.
Exp. I	692.2	12.8	1.075	0.502	gr. 144900
„ II	671.55	12.8	1.0	0.4673	„ 140600
„ III	691.2	12.8	1.115	0.52588	„ 143300

Dans ces expériences on a employé environ 14—16 litres d'oxygène ozonifié.

La marche de la température fut la suivante (pour pouvoir connaître la marche de l'expérience, on l'a notée chaque fois après 20 secondes):

Expérience I.		Expérience II.			Expérience III.		
13.88°	14.40	18.16°	18.66	19.16	18.925°	19.19	19.79
13.88	14.42	18.16	18.68	19.16	18.925	19.21	19.82
13.88	14.46	18.16	18.70	19.16	18.925	19.23	19.84
13.88	14.49	18.16	18.715	19.16	18.925	19.25	19.865
13.88	14.52	18.46	18.73	19.16	18.925	19.27	19.89
13.88	14.54	18.16	18.75	19.16	18.925	19.28	19.92
13.88	14.57	18.16	18.76	19.16	18.925	19.30	19.94
13.88	14.60	18.16	18.78	19.16	18.925	19.32	19.965
13.88	14.63	18.16	18.79	19.16	18.925	19.34	19.98
13.88	14.66	18.16	18.81	19.16	18.925	19.37	20.01
13.88	14.69	18.16	18.83	19.16	18.925	19.375	20.03
13.88	14.72	18.16	18.85	19.16	18.925	19.39	20.04
13.88	14.74	18.16	18.87		18.925	19.415	20.04

Expérience I.		Expérience II.		Expérience III.		
13.88°	14.76	18.16°	18.89	18.925°	19.42	20.04
13.88	14.79	18.16	18.905	18.925	19.44	20.04
13.88	14.82	18.16	18.92	18.925	19.46	20.04
13.88	14.85	18.19	18.94	18.925	19.48	20.04
13.91	14.87	18.21	18.96	18.95	19.50	20.04
13.95	14.89	18.24	18.98	18.99	19.515	20.04
13 99	14.92	18.27	18.995	19.01	19.535	20.04
14 02	14.94	18.30	19.01	19 03	19.555	20.04
14.06	14.95	18.32	19.02	19.05	19.57	20.04
14.08	14.95	18.34	19 04	19.07	19.59	20.04
14.11	14.955	18.36	19.055	19.08	19.615	20.04
14.14	14.955	18.36	19.07	19.09	19.634	20.04
14.17	14.955	18.40	19.08	19.10	19.66	20.04
14.21	14h955	18.42	19.095	19.11	19.68	20.04
14.24	14.955	18.45	19.10	19.12	19.70	20.04
14.27	14.955	18.47	19.12	19.135	19.72	
14.30	14.955	18.49	19.13	19.15	19.74	
14.335	14.955	18.50	19.14	19.17	19.765	
14.36	14.955	18.52	19.15			
	14.955	18.54	19.16			
	14.955	18.56	19.16			
		18.58				
		18.60				
		18.62				
		18.64				

En comparant entre eux les résultats de la première et de la seconde série d'expériences, pour ce qui regarde la constante, nous avons:

		$As_2O_3Aq, 2\,000$
Sér. I Expér.	I	133000 c.
„	II	141600
„	III	145000
„ II Expér.	I	144900
„	II	140600
„	III	143300

Quant à l'expér. I de la série I, nous avons déjà communiqué antérieurement [1]) que le courant d'oxygène ozonifié avait été

[1]) *l. c., p.* 7.

très probablement trop rapide; en outre, la solution arsénicale ne fut pas pesée pour le dosage dans cette expérience. En écartant cette expérience, on a comme moyenne des Sér. I et II:

moyenne	$As_2O_3Aq, 2\,000$
Sér. I (sans l'exp. I)	143300 c
„ II	142900
différence	400 c.

Le résultat moyen de la Sér. I (sans l'expér. I) et de la Sér. II est donc:

Rés. moyen de Sér. I et II $As_2O_3Aq, 2\,000$ 143100 c.

L'augmentation de la température du ballon cal. fut relativement plus grande dans la seconde série que dans la première. Or comme l'oxygène ozonifié parcourait l'appareil plus lentement, il est très probable que la valeur 142900 c est un peu trop basse.

M. Berthelot [1]) trouva dans deux déterminations:

I	$As_2O_3Aq, 000$	= 137600 c
II	„	= 125600
	en moyenne	= 131600 c.

La différence avec M. Berthelot est donc:

143100 — 131600 = 11500 c.

C'est à juste titre que M. Berthelot attache le plus de valeur à 137600 c., mais nous aussi nous avons plus de confiance dans le nombre le plus élevé que nous ayons trouvé, c'est à dire dans 145000 c., ce qui donne avec M. Berthelot une différence de:

145000 — 137600 = 7400 c.

Le résultat provisoire obtenu par nous, est donc: que nous avons trouvé la valeur de $As_2O_3Aq, 2\,000$ plus grande que l'éminent thermochimiste.

[1]) *l. c.*, p. 3.

Si l'on prend pour la constante de $As_2O_3Aq,OO = 78607c + 2(I,I)$ (voyez p. 359) et pour la valeur de $As_2O_3Aq, 2\,OOO = 143100$, on a pour celle de OO, OO, OO

$$As_2O_3Aq, OO - As_2O_3Aq, 2\,OOO = OO, OO, OO$$
$$78607 + 2(I,I) - 143100 = OO, OO, OO$$
$$-\{64493c - 2(I,I)\} = OO, OO, OO.$$

La valeur moyenne de M. Berthelot pour $As_2O_3Aq, 2\,OOO$, c'est à dire celle de 131600 c, donne:

$$-\{54993\,c - 2\,(I,I)\} = OO, OO, OO.$$

La valeur 137600 c (voyez plus haut) donne

$$-\{58993\,c - 2\,(I,I)\} = OO, OO, OO,$$

et notre valeur maxima de 145000 c

$$-\{66393\,c - 2\,(I,I)\} = OO, OO, OO.$$

La valeur dernière, à savoir OO, OO, OO = – 66393, se rapproche probablement le plus de la vérité, pour les raisons ci-dessus indiquées.

Nous devons encore ajouter à ce qui précède que la forme OO, OO, OO, se rapportant à la chaleur absorbée en transformant 3 OO en 2 OOO, ne comprend pas, dans notre cas, la chaleur de la condensation de 3 molécules d'oxygène ordinaire en deux d'ozone. La raison en est tout simplement que, dans la réaction thermochimique

$$As_2O_3Aq, 2\,OOO,$$

la réaction chimique qui a lieu est:

$$As_2O_3 + 2\,OOO = As_2O_5 + 2\,OO;$$

autrement dit, deux molécules d'ozone donnent ici deux molécules d'oxygène ordinaire; le nombre des molécules gazeuzes ne change donc pas.

Nous nous réservons de faire encore quelques séries d'expériences pour déterminer d'une manière plus précise la constante de OO, OO, OO, et nous y emploierons une méthode directe et une indirecte. Quant à la première, nous avons en vue celle avec le noir de platine, qui a montré effectivement par l'expérience [1]) qu'il possède très probablement la propriété de transformer facilement l'ozone en oxygène ordinaire. Quant à la méthode indirecte, nous nous en tiendrons, du moins d'abord, à celle de l'acide arsénieux, que nous pouvons encore un peu améliorer.

Nous espérons, par exemple, nous mettre en état de conduire, dans une troisième série d'expériences, non seulement l'oxygène ozonifié, mais aussi l'air, de réservoirs en verre, afin qu'ils soient tous les deux dans des conditions à peu près identiques. En même temps, nous aurons soin de faire fonctionner l'aspirateur plus régulièrement, ce qui a trait à ce qui précède; car, dans ce cas-là seulement, pourra se montrer la nécessité d'introduire la formule de refroidissement.

Considérations théoriques.

Comme ce qui précède se borne principalement à l'observation, nous voulons y joindre quelques vues théoriques; car le sujet nous a porté à regarder les états allotropiques [2]) de quelques éléments d'un point de vue thermochimique.

Allotropie atomique et moléculaire.

La différence relative de la quantité d'énergie que possède l'oxygène dans ses états allotropiques est très remarquable, si on la compare à la différence se montrant dans les allotropies du carbone et du soufre p. e. Cette différence entre le graphite et

[1]) *l. c.*, p. 8.

[2]) *Handwörtb.* Fehling, *Art. Isomerie.*

le carbone amorphe, calculée à un atome, c'est à dire 12 $=$ C, n'est pas plus grande que 3000 c environ; et dans les allotropies du soufre, cette différence relative d'énergie semble même être trop petite pour qu'on puisse la déterminer d'une manière assez exacte. Quant à l'oxygène ordinaire et à l'ozone, la différence relative d'énergie, calculée à un atome d'oxygène O $=$ 16, peut être estimée à non moins de 11000 c, ainsi qu'il résulte de ce qui précède. Or l'hypothèse que la séparation des atomes de carbone exige un plus grand nombre de calories que celle des atomes d'oxygène, ne saurait être trop hasardée. Cependant il est possible que les molécules de carbone et de soufre p. e. à l'état solide (et le soufre aussi à l'état liquide) se composent de beaucoup d'atomes et que la différence du nombre d'atomes dans les allotropies soit petite. Les faits connus ne nous obligent pourtant pas du tout à admettre cette dernière supposition; et si l'on fait attention aux allotropies de l'oxygène — remarquant que l'ozone, qui n'a qu'un atome de plus que l'oxygène ordinaire, en diffère cependant beaucoup dans ses propriétés, étant peu stable p. e. — il nous paraît probable, quoiqu'on n'ait pas affaire à des gaz, qu'en premier lieu les allotropies stables du carbone pourront avoir le même nombre d'atomes dans la molécule. Quant au soufre, cela n'est pas moins probable p. e. pour les allotropies α-, β- et γ-, si l'on tient compte que le soufre γ, qui contiendrait le plus d'énergie, se forme du soufre α à une haute température (car le soufre à l'état de vapeur au-dessus de son point d'ébullition doit être regardé comme étant le soufre γ ayant deux atomes dans la molécule); en outre, le soufre α se transforme par la chaleur en soufre β, qui possédera relativement plus d'énergie.

En général, on peut admettre qu'une élévation de température pourra diminuer le nombre d'atomes dans la molécule. Pour le soufre, il nous semble qu'il n'y a pas non plus de raison d'admettre un grand nombre d'atomes dans les molécules des allotropies et une petite différence dans ce nombre pour les molécules des différentes allotropies. Au contraire les petites différences d'énergie dans les allotropies du carbone et surtout du soufre,

comparées à la grande différence des allotropies de l'oxygène, semblent trouver une explication en admettant que probablement le nombre d'atomes des allotropies du carbone (et du soufre) est le même. Ces dernières allotropies pourraient être causées par une différence dans l'arrangement des molécules, et on aurait à distinguer deux sortes d'allotropies, à savoir:

1° une allotropie atomique,

2° une allotropie moléculaire.

Dans les allotropies atomiques, ce sont les molécules ellesmêmes qui sont allotropiques, mais dans les allotropies moléculaires on peut regarder une différence de position relative des molécules comme la cause de la différence des propriétés. Nous espérons que ce qui précède pourra contribuer à fixer un peu plus l'attention sur ce point.

L'ozone considéré plus en détail.

Dans tout ce qui précède, nous sommes partis de la supposition que les p. s. de l'oxygène et de l'ozone sont 16 et 24, donc les p. mol. 16×2 et 24×2, et les formules OO et OOO. Quant à l'affinité, on a adopté l'oxygène comme bivalent, donc:

$O = O$ et $\overset{O-O}{\underset{O}{\vee}}$ ou $O - O - O$; dans le dernier cas, il y aurait des affinités libres. En admettant que la chaleur de combinaison d'une affinité d'un atome d'oxygène avec une affinité d'un autre atome d'oxygène soit toujours la même, tant dans l'oxygène ordinaire que dans l'ozone, exprimé par: $\overset{I}{O}, \overset{I}{O} = y$, on est conduit à la formule $O - O - O$ [1]) pour l'ozone, parce que dans $3\,(O = O)$ et $2\left(\overset{O-O}{\underset{O}{\vee}}\right)$ il y a douze affinités qui se neutralisent deux à deux, et que par conséquent dans la transformation de l'oxygène ordinaire en ozone il ne pourrait pas y avoir absorp-

[1]) *Scheik. Aant. v.* E. Mulder, t. II, p. 186, 189. (1871).

tion de chaleur, tandis que l'expérience démontre le contraire. Partant de l'hypothèse des affinités comme base de la structure relative, ici de l'oxygène ordinaire et de l'ozone, on pourrait admettre que la valeur $\overset{I}{O}, \overset{I}{O}$ n'est pas toujours la même. Or comme les atomes dans l'oxygène ordinaire et dans l'ozone ne sauraient être placés vis à vis les uns des autres d'une manière identique, ceci semble probable, à part même l'hypothèse des affinités.

Pour le moment, on ne saurait faire autre chose que d'admettre provisoirement pour $O, O = y$ la même valeur, et dans ce cas l'ozone doit être regardé comme O — O — O; en faveur de cette opinion on pourrait alléguer le peu de stabilité de l'ozone, tandis que la structure $\overset{O}{\underset{O-O}{\wedge}}$ indiquerait une stabilité plus grande.

Le fait que ni la chaleur ni la lumière, mais seulement l'électricité peut transformer l'oxygène ordinaire en ozone, s'explique en tant que des molécules gazeuses chargées d'électricités différentes peuvent arriver temporairement à l'état de repos, ce qui est favorable à l'attraction des molécules et des atomes, ainsi que l'électricité elle-même.

Hypothèse sur la structure des éléments.

Non seulement on a traité maintes fois, surtout dans les dernières années, de la manière dont les éléments pourraient être construits, mais même on a fait des tentatives pour pénétrer par voie expérimentale jusqu'à la structure des éléments. Or il est connu qu'on ne pourrait pour le moment indiquer un fait quelconque qui nous oblige d'admettre qu'un élément, et de même l'atome, puissent être disséqués par les moyens dont la science dispose à présent; il est même très peu probable que l'électricité à son maximum de tension puisse disséquer l'atome. Pourtant il pourrait y avoir de l'intérêt à examiner quelles hypothèses sur la structure de la matière ont leur droit d'exi-

stence. A notre connaissance, l'hypothèse suivante n'a pas encore été énoncée, mais nous ajouterons que sa valeur est naturellement très relative; c'est celle, que l'atome prétendu peut être regardé comme l'atome de premier ordre, construit d'atomes du second ordre, qui se composent eux-mêmes d'atomes du troisième ordre, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Cette hypothèse n'exclut nullement l'unité de la matière. Selon elle, l'atome serait composé infiniment, et chaque tentative d'obtenir une connaissance complète de la matière se heurterait à l'impossibilité de faire un chemin indéfiniment long d'expériences.

Utrecht, 24 décembre 1881.

RECHERCHES CONCERNANT LA DISPERSION ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR UN SPECTRE DE GRANDE ÉTENDUE,

PAR

W. C. L. VAN SCHAIK.

---

§ 1. Appareils et méthode en général.

Les recherchcs exactes sur la dispersion électromagnétique des plans de polarisation sont limitées jusqu'ici au spectre visible, savoir, à la partie comprise entre les raies C et G.

J'ai pensé qu'il y aurait de l'intérêt à étendre la connaissance du phénomène à une autre partie du spectre, où les indices de réfraction se laissent également déterminer avec précision. Dans le spectre *ultra-violet*, ces indices sont grands, les longueurs d'onde petites; les valeurs à substituer pour ces quantités, dans les formules représentant la rotation électromagnétique, diffèrent donc assez notablement, pour cette partie du spectre, de celles qui sont propres au spectre *visible*. Cette circonstance peut offrir un certain avantage pour la vérification des formules existantes, ou pour la construction de formules nouvelles.

L'idée la plus naturelle était d'essayer d'étendre à l'ultra-violet les expériences que Verdet avait faites sur le sulfure de carbone et la créosote. Mais une étude préliminaire m'apprit bientôt que ces substances absorbent fortement les rayons ultra-violets.

Il fallait donc chercher d'autres matières, joignant, à une transparence suffisante pour l'ultra-violet, un pouvoir rotatoire électromagnétique qui ne fût pas trop faible.

Mon choix s'est arrêté sur deux corps, l'eau et une certaine espèce de verre. Le pouvoir rotatoire électromagnétique de l'eau est environ le tiers de celui du sulfure de carbone; le verre en question dévie un peu plus que l'eau.

J'ai rencontré ce verre dans le cabinet du laboratoire physique de l'université d'Utrecht [1]). C'est un assez grand parallélépipède de Fresnel, taillé par Dollond; sous l'épaisseur donnée, il fut reconnu suffisamment transparent pour la lumière ultra-violette. Un des angles aigus servit plus tard à la détermination des indices de réfraction.

L'indice pour la raie E fut trouvé, à 18^c, = 1,5139; la densité est = 2,46. Dans la suite, ce verre sera appelé „verre à glace de Dollond".

Les rotations ont été déterminées suivant la méthode de Fizeau et Foucault. Pour la rotation auxiliaire, j'ai employé, de même que Verdet et M. H. Becquerel, une plaque de quartz de un millimètre d'épaisseur, qui était taillée perpendiculairement à l'axe optique et déviait le plan de polarisation à gauche. On la plaçait entre les nicols, tout près de l'analyseur.

Pour l'observation des rayons ultra-violets, le spectroscope exigeait une disposition particulière.

D'abord, les milieux réfringents devaient laisser passer convenablement les susdits rayons, et, d'autre part, pour les rendre visibles, un oculaire spécial était nécessaire.

Je me suis servi pour l'ultra-violet d'un spectroscope ordinaire de Steinheil, dont le verre était remplacé par du spath d'Islande et du quartz.

Le prisme réfringent était un prisme équilatéral de spath d'Islande, et j'employais le spectre ordinaire, qui, pour cette substance, est plus grand que le spectre extraordinaire. L'axe optique était à peu près parallèle aux arêtes réfringentes.

Pour le collimateur, je fis faire une lentille biconvexe de spath

---

[1]) Il fait partie d'un appareil de polarisation d'Airy, n°. 442 du catalogue. (Voir *Pogg. Ann.* t. XXIII).

de 29 mm. de diamètre et de 25 cm. de distance focale moyenne; elle fut taillée suivant l'axe optique.

Pour l'objectif de la lunette, j'ai pris une lentille de quartz qui se trouvait au cabinet de physique; sa distance focale mesure environ 30 cm., et l'axe optique est sensiblement perpendiculaire au milieu de la lentille.

Au lieu d'une fente, j'ai employé dans la mesure de la rotation, le foyer linéaire d'une lentille cylindrique biconvexe de spath, à distance focale moyenne de 16 mm. et à axe optique dirigé suivant la longueur du cylindre. Par cette lentille, le faisceau lumineux cylindrique, d'un diamètre d'environ 11 mm. au sortir de l'analyseur, était concentré en une ligne, concentration absolument nécessaire ici, au point de vue de l'intensité lumineuse.

Pour l'observation de l'ultra-violet, j'ai fait usage de l'oculaire fluorescent de Soret, pourvu d'une solution d'æsculine. Quant à la construction de cet appareil, je renvoie aux mémoires insérés dans les *Ann. de Chimie et de Phys.*, 1877, XI, et dans *Pogg. Ann. Jubelband.*

Le polariseur et l'analyseur étaient deux prismes de Nicol.

L'emploi d'un prisme de spath calcaire dans le spectroscope (voir ci-dessus) oblige de mesurer la rotation à l'aide du polariseur, en conservant à l'analyseur une position fixe. En vue de l'intensité lumineuse, on doit naturellement tâcher d'obtenir que le plan de polarisation des rayons qui, après avoir traversé l'analyseur, tombent sur le prisme, soit parallèle au plan de polarisation du spectre qu'on emploie. Or, dans le prisme de spath, le plan de polarisation de chacun des deux spectres a une position déterminée, et il convient donc que le plan de polarisation des rayons qui entrent dans le spectroscope ait également une position fixe.

Pour l'étude du spectre visible, le spectroscope dont il vient d'être question était remplacé par un spectroscope „automatique universel" de Browning, à six prismes de flint, donnant un pouvoir dispersif de douze prismes. Je n'employais qu'un seul

de ces prismes, avec lequel j'obtenais par réflexion, comme c'est le cas dans ces spectroscopes, une dispersion de deux prismes.

Devant le collimateur de ce spectroscope, je plaçais une lentille cylindrique biconvexe de Duboscq, taillée de telle sorte que les deux surfaces cylindriques convexes se croisent à angle droit, d'où il résulte une convergence du faisceau lumineux dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Le foyer linéaire (vertical), que j'amenais sur la fente, est à une distance d'environ 32 mm. du centre de la lentille.

Les rotations électromagnétiques furent toujours étudiées à la lumière solaire. Comme héliostat, on se servait d'un simple porte-lumière, dirigé à la main de façon que le faisceau incident conservât une position fixe, ce qui se laissait faire avec une assez grande exactitude, vu que la personne chargée de ce soin pouvait observer, à une distance de plus de trois mètres du porte-lumière, une tache lumineuse circulaire, qui devait être projetée sur l'ouverture d'un diaphragme.

Parmi les miroirs que j'essayai, ceux qui convinrent le mieux furent un miroir en argent, construit par M. Olland, et un certain miroir en verre étamé. Bien que ce dernier ait une épaisseur assez notable, il satisfait bien pour l'ultra-violet, probablement parce qu'il est un peu cylindrique, la génératrice de la surface étant parallèle à la largeur du miroir. Il en résultait que le faisceau lumineux, qui pénétrait dans le spectroscope à une distance de cinq mètres de l'ouverture éclairée, éprouvait une certaine concentration.

On observait facilement, dans l'oculaire fluorescent, les raies jusque au-delà de *S*.

Pour l'observation de la rotation du plan de polarisation des rayons ultra-violets par la méthode employée, il est nécessaire que la pièce où l'on opère soit aussi obscure que possible. La réflexion diffuse, sur les objets les plus divers, doit surtout être évitée; dès l'entrée du faisceau solaire dans la chambre, une lueur diffuse se répand de tous côtés. On doit supprimer ces phénomènes au moyen de tubes et de diaphragmes.

Il convient, en outre, que la lumière pénétrant dans le spectroscope soit aussi intense que possible. Pour cela, l'ouverture du diaphragme de l'héliostat doit être prise beaucoup plus grande que la section du faisceau lumineux qui tombe sur le spectroscope. Supposons, par exemple, qu'en avant du miroir qui projette la lumière solaire dans la chambre, on ait placé un diaphragme présentant une ouverture de 4 cm. de diamètre; l'image reçue sur un écran éloigné d'une couple de mètres de l'ouverture lumineuse n'est alors plus tout à fait blanche au centre; ce n'est qu'en donnant à l'ouverture des dimensions beaucoup plus grandes qu'on obtient une lumière non affaiblie.

Le but a été le mieux atteint en alignant l'un derrière l'autre des diaphragmes de plus en plus petits.

Le diaphragme en avant du miroir avait une ouverture de 92 mm. de diamètre. Sur la bonnette du porte-lumière était placé un tube noirci à l'interieur, long de 1,45 m., qui à son extrémité était pourvu d'un diaphragme large de 80 mm. A une distance de 2,48 m., le faisceau lumineux rencontrait un diaphragme indépendant, de 39 mm. de diamètre, et un peu plus loin, savoir à 3 mètres de distance du porte-lumière, un second diaphragme isolé, de 25 mm.

La lumière pénétrait ensuite dans le polariseur, donc dans l'appareil optique, qui, non compris le spectroscope, avait environ 1,40 m. de longueur.

Le nicol polariseur avait un diaphragme de 18 mm. Les anneaux de fer doux, qui formaient les surfaces polaires de l'électro-aimant, présentaient des ouvertures de 11,5 mm., tandis que le nicol analyseur se trouvait placé entre des diaphragmes de 11 mm. de diamètre.

Par cette disposition je réussis, malgré l'assez grande longueur du rayon lumineux, et tout en empêchant suffisamment l'intervention gênante de la lumière diffuse, à projeter sur la lentille cylindrique placée devant le spectroscope un faisceau lumineux d'intensité non réduite. Il n'en est pas moins vrai que ces recherches exigent beaucoup de soins et sont certainement au nombre des plus laborieuses que présente la physique pratique.

Le courant était fourni par une machine dynamo-électrique de Gramme (Breguet), qui, pour donner une forte lumière entre les pointes de charbon, avait besoin d'une force d'environ 2½ chevaux. Elle était mue par un moteur à gaz d'Otto, de la force de 4 chevaux, et faisait près de 900 tours par minute. L'électro-aimant était un modèle ordinaire de Ruhmkorff. Sur les noyaux de fer doux on vissait les armatures annulaires, dont l'usage a été introduit par Verdet.

L'intensité relative de la force magnétique était mesurée, comme dans les recherches de Verdet, en faisant agir l'électro-aimant à distance sur un aimant suspendu. Celui-ci était un petit aimant annulaire de Edelmann, qui se trouvait à 4,34 mètres du centre du champ magnétique, et dont on mesurait la déviation au moyen d'un miroir; l'échelle était éloignée de 3,23 mètres de l'aimant suspendu.

Je vais maintenant entrer dans quelques détails concernant la mesure des rotations et des indices, et communiquer les principaux résultats que j'ai obtenus, pendant l'été de 1881, au laboratoire physique de l'Université d'Utrecht.

§ 2. Les rotations.

La méthode d'observation pour les rotations électromagnétiques dans le spectre visible ne différait pas essentiellement de celle de Verdet; toutefois, je plaçais constamment, de même que dans l'ultra-violet, une plaque de quartz de 1 mm. épaisseur, taillée perpendiculairement à l'axe, entre les nicols, près de l'analyseur.

En outre, j'observais toujours la rotation simple, jamais la rotation double, c'est-à-dire, que je n'intervertissais pas le courant, Chaque fois, une observation était donc faite sans le courant, puis une autre avec le courant. La raison en était que l'électro-aimant s'échauffait fortement et rapidement sous l'influence d'un courant intense, et qu'il valait par conséquent mieux faire agir celui-ci

à intervalles que d'une manière continue. Un bouton permettant de fermer et de rompre le circuit se trouvait placé à portée de la main lorsque l'observateur était assis devant le spectroscope.

Le polariseur et l'analyseur étaient portés chacun par un pied particulier, pourvu de vis calantes et de niveaux à bulle d'air.

Le cercle gradué du polariseur laissait évaluer, au moyen du vernier, un angle de 10 secondes, c'est-à-dire une valeur plus petite que l'erreur de l'observation, erreur qui, par suite du pointé inexact de la bande noire du spectre, pouvait s'élever, chez Verdet, même jusqu'à 10 minutes.

Un axe en cuivre, long d'environ 1,10 m., allait du support du polariseur à celui de l'analyseur; du côté du polariseur, cet axe portait un pignon, du côté de l'analyseur, un bouton, par lequel l'observateur pouvait faire tourner le polariseur.

Les rayons du spectre visible pour lesquels j'ai mesuré les rotations correspondent aux raies C, D, E, b, F, G de Fraunhofer. J'ai également essayé de mesurer la rotation pour la raie h, mais les erreurs commises étaient trop fortes pour qu'on pût attribuer quelque valeur aux résultats. L'apparition de la bande noire dans cette région extrême et obscure du spectre visible s'oppose à une détermination tant soit peu exacte; aussi M. H. Becquerel donne-t-il, pour le résultat relatif à cette raie, des erreurs telles, que ce résultat ne peut plus inspirer aucune confiance [1]). Néanmoins, je crois qu'une observation meilleure des rotations dans cette région du spectre serait possible, si l'on employait une plaque de quartz un peu plus épaisse, ce qui diminuerait bien un peu la vitesse de la bande noire, mais augmenterait considérablement l'intensité lumineuse dans cette région.

L'intensité du spectre ultra-violet, que j'observais avec un oculaire fluorescent, s'affaiblit tellement vers la raie O, qu'il me parut impraticable, par cette méthode, de mesurer la rotation électromagnétique au-delà de N.

---

[1]) *Comptes rendus*, t. LXXXV.

Quoique, près de H_1 et H_2, la fluorescence soit assez forte, je ne pus pas non plus mesurer la rotation pour ces raies, parce que leurs largeurs et épaisseurs relatives occasionnent une illusion optique.

Je résolus donc de n'observer, dans l'ultra-violet, que les rotations pour *M* et *N*. La petitesse relative des longueurs d'onde, et surtout la grandeur des indices de ces rayons font suffisamment ressortir, comme la remarque en a été faite au § précédent, l'intérêt de ces observations pour la théorie.

Quand on emploie l'oculaire fluorescent, il importe que toutes les parois intérieures, qui s'y prêtent, soient recouvertes de noir de fumée. Le réflexion diffuse doit être évitée autant que possible.

Le réticule de l'oculaire devait, à ce qu'il m'a paru, s'éloigner un peu de la forme ordinaire. M. Soret traçait des lignes en croix sur l'une des deux plaques de verre entre lesquelles était placé le liquide fluorescent. Ces traits gravés sur verre ne me semblèrent pas assez nets. Lorsqu'on fait usage d'une plaque de verre d'urane, il est facile d'appliquer à la face postérieure (celle qui reçoit la lumière) des fils croisés métalliques, qu'on recouvre de noir de fumée.

Une pareille plaque de verre d'urane, de ½ mm. d'épaisseur, se laisse très bien employer au-delà de la raie *N*, mais non entre *N* et *H*, parce que dans cette région, comme le remarque M. Soret, la fluorescence du verre d'urane est insignifiante. Pour moi, je me suis toujours servi de la solution d'æsculine.

Si, en faisant usage de cette solution, on applique des fils croisés métalliques au côté postérieur de la plaque de verre, celui qui est le plus rapproché de la source lumineuse, l'épaisseur du verre pout donner lieu à une parallaxe entre les fils croisés et les raies du spectre. Avec des plaques de verre très minces on éviterait probablement cet inconvénient, mais il n'est pas pratique de trop réduire l'épaisseur des plaques, celles-ci étant exposées à se casser pendant les manipulations, d'autant plus que la solution d'æsculine doit être renouvelée tous les jours, ou même deux fois par jour.

A la paroi interne du réservoir de l'æsculine, donc dans le liquide même, on ne peut pas non plus placer les minces fils métalliques; ils casseraient à chaque instant, lors du remplissage du réservoir, et, en outre, de très petites bulles d'air viendraient aisément se loger sous les fils cylindriques, dans l'espace qui reste entre eux et le verre; or, la présence de bulles d'air dans le liquide doit être évitée avec soin, vu qu'elles produisent par réflexion totale une forte illusion optique, qui rend impossible tout pointé exact.

La disposition suivante est celle qui m'a satisfait le mieux. Les deux plaques de verre entre lesquelles est compris le liquide sont séparées l'une de l'autre par un anneau en cuivre de ½ mm. d'épaisseur. Dans l'ouverture de cet anneau est soudée une lame de cuivre de ¼ mm. d'épaisseur, de sorte qu'il reste encore, en avant, un espace de ¼ mm. de profondeur pour le liquide. La lame de cuivre est pourvue d'une ouverture en forme de V, dont l'extrémité supérieure se trouve au bord et la pointe au centre de la lame, et dont les côtés sont taillés en biseau, de manière à s'appliquer par leur tranchant contre la plaque de verre postérieure. Ce sont ces côtés tranchants de l'ouverture en V qui faisaient fonction de réticule dans la détermination des rotations. Ils étaient évidemment dans le même plan où se formaient, en cas de fluorescence, les raies de Fraunhofer, de sorte qu'il ne pouvait pas non plus se produire de parallaxe. Ce n'est qu'après avoir essayé différentes formes de lames, ainsi que des lames de mica à traits croisés, que je m'arrêtai à la disposition ci-dessus, avec laquelle j'obtins des résultats très constants.

L'oculaire de Ramsden, qui était placé en avant de la substance fluorescente, donnait un grossissement de 3¾ fois.

Pour l'observation des rotations dans l'ultra-violet, il importe encore beaucoup de placer le prisme de spath de telle sorte que le spectre soit aussi net que possible. Cette position ne correspond pas au minimum de déviation.

Lorsque le prisme se trouve dans la position de déviation

minima, il doit (vu d'en haut) être tourné encore un peu à droite, si l'observateur est placé de façon à avoir, avec la disposition ordinaire du spectroscope à un seul prisme, la source lumineuse à sa main gauche.

Les rayons les plus réfrangibles, tels que ceux de l'extrémité du spectre du zinc, obtenu en faisant jaillir entre des pôles de ce métal une étincelle d'induction concentrée, (par exemple $\lambda = 20,6$) se voient beaucoup plus difficilement sous la déviation minima que dans une autre position déterminée du prisme.

La lentille collimatrice de spath donne généralement lieu, dans l'oculaire, à deux images du spectre ordinaire. Ces images ont une assez grande différence de distance à la lentille. On peut donc faire sortir le tuyau qui porte l'oculaire, jusqu'à ce qu'une de ces deux images soit vue nettement; l'autre reste alors, pour ainsi dire, inaperçue. Mais lorsque, en faisant tourner le polariseur, on amène dans le champ la bande noire, celle-ci apparaît naturellement sur chacune des deux images, et bien que l'une d'elles ne soit presque pas visible dans les circonstances ordinaires, l'obscurcissement local ainsi produit se fait reconnaître plus ou moins distinctement.

Or, les raies correspondantes des deux images n'occupant nullement la même place dans le champ visuel, il en est de même des deux bandes noires; celles-ci ne coïncident pas exactement. Il en résulte que le milieu de cette bande, sur lequel on pointe, n'est pas jugé à sa place véritable [1]).

Il est donc nécessaire que l'image qu'on n'étudie pas soit complètement obscurcie. Cette condition est réalisée de la manière suivante.

On enlève le nicol polariseur, ainsi que la lentille collimatrice, puis on envoie, suivant l'axe de l'appareil optique, un faisceau de lumière non polarisée. On tourne alors l'analyseur, jusqu'à ce que le spectre ordinaire, qu'on reçoit sur un écran après avoir

---

[1]) Une mesure spéciale m'a appris qu'on peut commettre ainsi des erreurs de plus d'un degré.

détourné la lunette, soit aussi brillant que possible, et le spectre extraordinaire éteint. Cela obtenu, on ne touche plus à l'analyseur.

Ensuite on met en place la lentille collimatrice, qui est taillée suivant son axe optique. Elle donne sur l'écran deux images du spectre, qui se recouvrent en partie, mais sont faciles à distinguer l'une de l'autre. On tourne alors la lentille autour de l'axe de la lunette, en faisant mouvoir sa monture sur le filet de vis, jusqu'à ce que l'une des images soit éteinte. A partir de ce moment, la lentille collimatrice conserve sa position.

Le polariseur peut alors être remis en place, et l'appareil est prêt à fonctionner.

Immédiatement au-dessus des substances placées entre les pôles magnétiques se trouvait le réservoir d'un thermomètre, qui faisait par conséquent connaître très approximativement la température à laquelle l'expérience avait lieu. On sait, du reste, que la température ne constitue qu'un facteur très insignifiant dans la rotation électromagnétique, à tel point que plusieurs observateurs (Lüdtge, Bichat) ont cru pouvoir conclure que la rotation diminue tant soit peu lorsque la température s'élève, tandis que d'autres (Matteucci, Joubert) admettent dans ce cas une légère augmentation. En examinant les chiffres donnés par ces auteurs, on reconnaît effectivement qu'une différence de température, même de 10°, ne produisait dans la rotation qu'une différence inférieure de beaucoup à l'erreur de l'observation.

Durant les expériences, on notait itérativement la position de l'image de l'échelle dans le miroir de l'aimant suspendu, tant lorsque le circuit était fermé que lorsqu'il était ouvert [1]).

[1]) En introduisant une résistance dans le circuit, on peut faire qu'il en résulte, dans la déviation de l'image de l'échelle, une différence un peu plus grande que celle à laquelle peuvent donner lieu les variations du courant lui-même. Soit m la déviation, et Δm la différence produite par la résistance. Si alors on a trouvé, pour une certaine raie de Fraunhofer, d'abord une rotation $= \varrho$ et plus tard une différence de rotation $= \Delta \varrho$, on peut aisément vérifier si $\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta \varrho}{\varrho}$ et si, entre ces limites aussi, il est satisfait à une pareille relation. Dans ce cas, les observations relatives aux autres raies se laissent ramener, par un calcul simple, à des observations pour une même force magnétique.

Les rotations relatives aux petites longueurs d'onde auront toujours été données, à ce que je crois, un peu trop fortes, la différence, d'ailleurs, ne dépassant pas une couple de minutes. Cela tient, selon moi, à la nature de la méthode suivie, et doit donc s'appliquer aussi aux observations de Verdet. Voici de quoi il s'agit.

Prenons un spectre „normal," à rayons de moindre longueur d'onde situés à droite, et faisons-y apparaître de la manière décrite, par rotation électromagnétique, une bande noire. On reconnaîtra facilement que la partie la plus obscure de la bande ne correspond pas à son milieu, mais se trouve un peu à gauche: en effet, comme la rotation augmente très fortement à mesure que la longueur d'onde diminue, les plans de polarisation des rayons situés à droite du point le plus obscur s'écartent plus de la perpendiculaire au plan de polarisation de l'analyseur que ceux des rayons situés à gauche, et par conséquent ces rayons à droite éprouvent une extinction moindre; l'obscurcissement décroît plus rapidement du côté droit que du côté gauche.

Or, dans les expériences en question, il faut proprement viser la partie la plus obscure de la bande ; mais, involontairement, on amène sous le réticule une partie située plus près du milieu de la bande, c'est-à-dire, trop à gauche. En réalité, on mesure donc la rotation appartenant à la partie la plus obscure, qui maintenant se trouve à droite du réticule, et on attribue cette rotation mesurée (relative à une longueur d'onde moindre) au rayon qui tombe sur le réticule. On assigne donc à ce rayon une rotation trop grande. Cette différence augmentera encore un peu par l'emploi d'une plaque de quartz.

Si, au lieu d'un spectre normal, on a un spectre prismatique, et que la dispersion dioptrique y suive environ la même loi que la dispersion des plans de polarisation, la différence pourra être à peu près annulée; mais elle persiste, dans le sens positif, aussi longtemps que la dispersion rotatoire croît plus rapidement que la dispersion dioptrique à mesure que la longueur d'onde diminue; or, tel est sans doute le cas lorsqu'on emploie un prisme de spath d'Islande, vu que l'accroissement de la dispersion dioptrique

n'est alors par très grand dans l'ultra-violet (beaucoup plus petit, par exemple, qu'avec un prisme de quartz) et n'est certainement pas aussi fort, pour les petites longueurs d'onde, que celui de la dispersion rotatoire dans une plaque de quartz.

La différence en question doit affecter aussi les mesures de Verdet, car la dispersion rotatoire dans le sulfure de carbone et dans la créosote croît à coup sûr plus rapidement, pour les petites longueurs d'onde, que la dispersion dioptrique dans le flint du spectroscope.

Bien que la différence elle-même, comme on peut s'en convaincre, soit moindre que l'erreur de l'observation, il en résulte pourtant que les rotations données, pour les petites longueurs d'onde, peuvent aisément être trop fortes d'une couple de minutes.

Je vais communiquer maintenant les valeurs les plus probables des rotations électromagnétiques dans l'eau et dans le verre à glace de Dollond. Pour le spectre visible, Verdet avait déjà trouvé quelques valeurs approchées relatives à l'eau; la rotation indiquée ci-dessous pour C, dans l'eau, est empruntée à Verdet.

La longueur du trajet que la lumière parcourait dans le verre à glace était de 26,4 mm., la longueur de la colonne d'eau, de 89,8 mm. Le tube qui contenait l'eau était fermé par des plaques de verre dressées, de 1 mm. d'épaisseur, dont la rotation électromagnétique propre était portée en compte. Au cours des expériences, la température varia de 18° à 25° Cels., différence qui n'a aucune importance, d'après ce qui a été dit plus haut.

Au total, le nombre des visées faites pour la mesure des rotations, durant les mois de juillet, d'août et de septembre, s'éleva à environ sept cents.

Aux résultats de Verdet, concernant le sulfure de carbone et la créosote, viennent maintenant s'ajouter ceux des tableaux suivants, qui ont rapport à un spectre plus étendu. Les secondes lignes contiennent les rotations relatives, celle de E étant prise pour unité.

Rotation électromagnétique dans le verre à glace de Dollond.

C	*D*	*E*	*b*	*F*	*G*	*M*	*N*
4°14′	5°18′	6°43′	6°59′	8°3′	10°34′	14°59′	16°30′
0,630	0,789	1,000	1,040	1,199	1,573	2,231	2,457.

Rotation électromagnétique dans l'eau.

C	*D*	*E*	*F*	*G*	*M*	*N*
,,	4°9′	5°13′	6°13′	8°8′	11°20′	12°28′
0,630	0,795	1,000	1.192	1,559	2,172	2,389.

Pas plus que dans les observations de Verdet et de M. Becquerel, les derniers chiffres de ces nombres ne méritent une confiance absolue. Les erreurs de l'observation, dans les expériences de Verdet sur le sulfure de carbone et la créosote, pouvaient produire dans les valeurs de la dispersion pour la raie *G* une différence de 0,040 à un peu plus de 0,050 [1]), ce qui correspondait au cas le plus défavorable; pour les rayons des régions les plus claires du spectre, le maximum des erreurs possibles est plus petit. Evidemment, la grandeur de ce maximum ne saurait être indiquée exactement. Eu égard aux écarts des observations, j'estime que les plus grandes erreurs, qui peuvent exister dans les nombres ci-dessus donnés pour la dispersion (secondes lignes), s'élèvent à 0,012 pour les raies *D*, *E*, *b*; à 0,018 pour *F*; à 0,020 et à 0,025 pour *C* et *G*, et enfin à 0,050, tout au plus, pour *M* et *N*. Pour ces dernières raies, il va sans dire que l'erreur maxima doit être plus grande que pour les rayons du spectre visible. Néanmoins, ces observations possèdent certainement assez d'exactitude pour offrir de l'intérêt au point de vue de la théorie.

§ 3. Les indices de réfraction.

Les indices de réfraction des deux substances étudiées, l'eau et le verre à glace, ont été déterminés par la méthode de la déviation minima.

---

[1]) Voir *Ann. de Chim. et de Phys.* (3), t. LXIX.

Le morceau de verre, un parallélépipède de Fresnel, avait deux angles réfringents d'un peu plus de 54°, qui, par le fini de leur travail, étaient très propres à la recherche en question. L'eau était contenue dans la cavité cylindrique d'un prisme triangulaire équilatéral en verre, taillé d'une seule pièce; le rayon de la cavité était de 12,5 mm. Les ouvertures elliptiques des faces réfringentes étaient fermées par des glaces parallèles de 1 mm. d'épaisseur, qu'on fixait au moyen de gomme-laque dissoute dans l'alcool. Une fermeture de ce genre, mais dans laquelle les glaces étaient fixées sur le prisme à l'aide d'une solution de gomme et de sucre, avait déjà été préférée par Verdet, dans son travail sur le sulfure de carbone et la créosote, au mode ordinaire de fermeture, par une vis de pression.

Le spectroscope que j'employais pour les rotations dans l'ultra-violet servait en même temps de spectromètre. A cet effet, il était muni d'un cercle, dont le vernier donnait l'angle à 10 secondes près ou, par estime, à 5 secondes près. Trois alidades servaient à éliminer l'excentricité.

Dans l'ultra-violet j'employai, au lieu d'un réticule, une disposition analogue à celle qui a été décrite ci-dessus à propos des rotations, sauf qu'elle comptait *deux* ouvertures en forme de V, placées l'une au-dessous de l'autre, les pointes en regard.

Quoique, pour le spectre visible, les indices de l'eau fussent connus, j'en déterminai pourtant deux, savoir ceux pour F et pour H, afin de les comparer aux résultats des recherches antérieures.

Les angles des prismes furent mesurés par la méthode sur laquelle est fondé le goniomètre de Babinet. Cette mesure ne pouvait pas bien se faire au moyen du spectromètre, destiné seulement à la mesure des déviations. Les prismes furent placés sur un instrument universel de Repsold; à une distance de quelques mètres furent installées une fente lumineuse et une lunette à réticule, puis la mesure fut effectuée, par la méthode susmentionnée, avec une très grande exactitude. Les résultats obtenus sont:

angle du prisme creux rempli d'eau $= 60°4'41''$;
angle réfringent du parallélép. de verre à glace $= 54°20'20''$.

Je vais maintenant communiquer les résultats des mesures d'indices, qui ont également été effectuées pendant les mois de juillet, août et septembre 1881. En désignant les indices par n, la déviation minima par δ, l'angle réfringent par α, on a, comme l'on sait, pour l'application de la méthode de Fraunhofer:

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Verre à glace de Dollond, *à* 18° *Cels.*

$\alpha = 54° 20' 20''$

$\delta C = 32°43'\ 8''$	$nC = 1{,}5083$
$\delta D = 32°53'58''$	$nD = 1{,}5108$
$\delta E = 33°\ 7'18''$	$nE = 1{,}5139$
$\delta b = 33°10'23''$	$nb = 1{,}5146$
$\delta F = 33°19'43''$	$nF = 1{,}5167$
$\delta G = 33°41'58''$	$nG = 1{,}5218$
$\delta H_1 = 34°\ 1'\ 8''$	$nH_1 = 1{,}5262$
$\delta M = 34°17'20''$	$nM = 1{,}5299$
$\delta N = 34°30'48''$	$nN = 1{,}5330.$

Par H_1 est désignée la moins réfrangible des raies H.

Eau, à 18°,8 *Cels.*

$\alpha = 60°4'41''.$

$\delta F = 23°59'52''$	$nF = 1{,}33767$
$\delta H_1 = 24°29'17''$	$nH_1 = 1{,}34401$
$\delta M = 24°40'56''$	$nM = 1{,}34651$
$\delta N = 24°50'17''$	$nN = 1{,}34852.$

Comme on peut le voir, les valeurs de nF et de nH_1 sont intermédiaires entre celles qui ont été données par Van der Willigen

et par Fraunhofer (voir, par exemple, Wüllner, *Experimental-physik*, t. II, p. 134, éd. de 1875); ces valeurs se rapportent d'ailleurs à d'autres températures.

Prenons, pour le spectre visible, le système d'indices admis par M. Wüllner (*Experim. Physik.*, t. II, p. 142); dans ce système, on a:

$$nF = 1{,}33720$$
$$nH_1 = 1{,}34350.$$

Les observations pour nM et nN étant alors ramenées, aussi bien que possible, au moyen de différences, à ce système de M. Wüllner, on obtient:

$$nF = 1{,}33720$$
$$nH_1 = 1{,}34350$$
$$nM = 1{,}34599$$
$$nN = 1{,}34804.$$

Pour exprimer les indices obtenus en longueurs d'onde, j'ai déterminé les constantes d'après la formule de Cauchy.

Pour l'eau, on sait que la formule

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

est suffisante; pour le verre à glace, il fallait tenir compte de *trois* constantes:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}.$$

Ci-dessous, je donne un tableau comparatif des résultats de l'observation et du calcul, en empruntant à M. Wüllner les indices connus du spectre *visible* pour *l'eau*. Les longueurs d'onde sont exprimées en cent-millièmes de millimètre; les valeurs adoptées (dans le vide) sont:

$$\lambda C = 65{,}63 \qquad \lambda F = 48{,}61$$
$$\lambda D = 58{,}93 \qquad \lambda G = 43{,}07$$
$$\lambda E = 52{,}70 \qquad \lambda H_1 = 39{,}67$$
$$\lambda b = 51{,}68 \qquad \lambda M = 37{,}29$$
$$\lambda N = 35{,}80.$$

On sait, d'ailleurs, que le quatrième chiffre des longueurs d'onde n'est pas encore définitivement fixé.

Indices de réfraction du verre à glace de Dollond.

$$A = 1{,}49885$$
$$\log B = 1{,}60446$$
$$\log C = 3{,}65378.$$

	Observ.	Calcul.	Différence.
C	1,5083	1,5084	—0,0001
D	1,5108	1,5108	0
E	1,5139	1,5139	0
b	1,5146	1,5145	+0,0001
F	1,5167	1,5167	0
G	1,5218	1,5218	0
H_1	1,5262	1,5262	0
M	1,5299	1,5301	—0,0002
N	1,5330	1,5330	0.

Indices de réfraction de l'eau.

$$A = 1{,}32410$$
$$\log B = 1{,}48658.$$

	Observ.	Calcul.	Différence.
C	1,33122	1,33122	0
D	1,33307	1,33293	+0,00014
E	1,33527	1,33514	+0,00013
F	1,33720	1,33708	+0,00012
G	1,34063	1,34063	0
H_1	1,34350	1,34358	—0,00008
M	1,34599	1,34615	—0,00016
N	1,34804	1,34802	+0,00002.

L'accord de l'observation et du calcul est pleinement suffisant pour que les indices donnés puissent être employés dans la théorie de la rotation électromagnétique.

L'oculaire fluorescent a donc pu être appliqué aussi, avec succès, à la détermination des indices de réfraction des rayons ultra-violets. Si je me suis contenté de mesurer ceux de *M* et *N*, c'est que les indices ne nous intéressaient ici qu'au point de vue des rotations observées. Mais il ne serait pas difficile de déterminer, au moyen de l'oculaire fluorescent, les indices des raies jusqu'à *S* et *T*. Beaucoup d'autres déterminations, concernant l'absorption et la fluorescence, seront également possibles à l'aide de cet instrument.

QUATRIÈME LIVRAISON.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

Pour faciliter l'acquisition de la première série du recueil, composée des volumes I à X (années 1866—1875), avec tables alphabétiques générales des matières et des noms d'auteurs, cette série est offerte temporairement au prix réduit de:

fl. de Holl. 40 = francs 84 = marks 67.

Les personnes qui voudraient profiter de cette offre sont priées de s'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des sciences, M. E. H. VON BAUMHAUER, à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

SUR LE POUVOIR ROTATOIRE SPÉCIFIQUE

DE

L'APOCINCHONINE

ET DE

L'HYDROCHLORAPOCINCHONINE

SOUS L'INFLUENCE DES ACIDES,

PAR

A. C. OUDEMANS Jr.

Les recherches que je vais faire connaître ont été entreprises à l'occasion d'une assertion émise par M. O. Hesse dans les *Annalen der Chemie und Pharmacie*, t. CCIX, p. 68. Suivant lui, la loi que j'ai signalée jadis relativement au pouvoir rotatoire spécifique des alcaloïdes sous la forme de sels basiques et neutres ne serait pas générale, et l'hypothèse que j'ai formulée à cet égard reposerait sur une base inexacte.

Dans le passage dont il s'agit, à propos d'une étude faite par lui sur la conquinamine, M. Hesse dit textuellement ce qui suit:

,,Das Conchinamin zeigt also in saurer Lösung fast genau „dasselbe Drehungsvermögen wie in neutraler Lösung. Oude- „mans, welcher die gleiche Erscheinung beobachtet hat, glaubt „dieselbe in Beziehung der Basicität unseres Alkaloïds bringen „zu können. — *Diese Annahme ist jedoch eine irrige; denn es*

„*giebt Basen, die in saurer und* (*stöchiometrisch*) *neutraler Lö-*
„*sung keine nennenswerthen Differenzen im Drehungsvermögen*
„*erkennen lassen, dabei aber zweisäurig sind. Als Beispiel dieser*
„*Art mag das Hydrochlorapocinchonin genannt werden*".

En présence d'une affirmation si catégorique, personne ne s'étonnera que j'aie cherché les preuves dont le chimiste de Feuerbach, dans des écrits antérieurs, aurait pu appuyer son opinion. Sous ce rapport, toutefois, mon attente a été amèrement déçue; tout ce que j'ai pu découvrir, sur le point en question, se réduit à un Mémoire publié dans les *Ann. der Chemie u. Phàrm.*, t. CCV, où l'on trouve, p. 348—350, une brève et superficielle communication concernant la base hydrochlorapocinchonine, citée comme exemple à l'encontre de ma thèse. Relativement au p. r. s. de cet alcaloïde, les seules indications que j'aie trouvées ont rapport à une solution de la base dans l'alcool à 97 pour cent en volume (+ 205°.4), et à une solution aqueuse, dans laquelle 1 molécule de l'alcaloïde était unie à 3 molécules d'acide chlorhydrique.

Le plus singulier, c'est que l'auteur rapporte (*l. c.*, p. 349), comme une propriété de l'hydrochlorapocinchonine et d'autres produits d'addition analogues dans cette série, qu'ils ne forment, à ce qu'il semble (*anscheinend*), pas de sels neutres (basiques, selon ma manière de voir). Quant aux preuves de cette assertion, elles manquent complètement, et de rien il n'appert que l'auteur ait réellement cherché à préparer de pareils sels neutres (basiques, selon moi).

La contradiction manifeste qu'accusent à cet égard les écrits de M. Hesse, et la légèreté avec laquelle il exerce habituellement la critique, m'ont engagé à soumettre les deux bases apocinchonine et hydrochlorapocinchonine à une étude spéciale, surtout en ce qui concerne leur pouvoir rotatoire spécifique, afin de m'assurer si les affirmations tranchantes, mais *non* étayées de preuves, du savant auteur de la découverte de tant d'alcaloïdes de l'opium et du quinquina, reposent, oui ou non, sur des fondements erronés.

Apocinchonine.

J'ai préparé cette base suivant la méthode indiquée par M. Hesse. Aux remarques qu'il a faites à ce sujet, je n'ai rien à ajouter.

L'étude du p. r. s. de la base elle-même, en solution dans l'alcool absolu, m'a fourni les résultats suivants:

Apocinchonine dans l'alcool absolu [1]).

$p = 0.3139$ gr.; $V = 20$ C. C.; $l = 302.8^{mm}$; $f = 16°$ C.

Valeurs observées de α.

7°38′; 7°36′; 7°37′5; 7°37′.

$(\alpha)_D = + 159°.7.$

M. Hesse a trouvé pour $p = 1$, en solution dans l'alcool à 97 pour cent en vol., $(\alpha)_D = + 160°.0$.

Sels d'apocinchonine.

J'ai étudié quelques sels d'apocinchonine, surtout des sels basiques [2]), parce qu'il me paraissait intéressant, au point de vue de mes idées concernant les lois du p. r. s. des alcaloïdes, de déterminer celui-ci tel qu'il se présente chez les sels basiques, et de comparer les valeurs trouvées à celles qui se déduisent de l'examen des sels neutres, ou à celles qui s'obtiennent,

---

1) Pour ce qui regarde la méthode d'observation suivie dans l'étude de cette base, je renvoie à ce que j'en ai dit dans mes communications antérieures sur d'autres bases du quinquina. Pour abréger, je ne donnerai dorénavant que les valeurs moyennes déduites des quatre lectures différentes sur le limbe du polaristrobomètre.

2) J'appelle sels *basiques* les combinaisons de 1 mol. d'une base biacide avec 1 mol. d'un acide monobasique ou avec ½ mol. d'un acide bibasique; sels *neutres*, ceux dans lesquels 1 mol. d'une base biacide est unie à 2 mol. d'un acide monobasique ou à 1 mol. d'un acide bibasique.

comme maximum, lorsqu'on ajoute des quantités croissantes d'acide à 1 molécule de la base.

En général, il faut remarquer que les sels basiques d'apocinchonine sont ordinairement peu solubles dans l'eau, de sorte que je fus souvent obligé d'opérer sur des dissolutions assez étendues. Une exception est faite à cet égard par le *nitrate*, dont la solution, amenée à l'état sirupeux par la concentration, refuse de cristalliser et se dessèche en une masse amorphe, gommeuse. L'*acétate*, subsistant en présence d'un excès d'acide, ne put pas non plus être obtenu à l'état solide cristallin. Le *formiate* montrait bien une tendance à la cristallisation, mais, mis en solution en présence d'un excès d'acide, puis abandonné à l'évaporation spontanée, il ne se laissait pas séparer suffisamment de la solution épaisse et sirupeuse du sel neutre.

Chlorhydrate basique. $\overset{+}{\text{Ap}}.\ \text{Cl H} + 2\,H_2O$.

(Eau de cristallisation: trouvé 9.1 p. cent, calculé 9.8 p. cent).

1) $p = 0.1244$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé 20°38′; 2°36′; 2°37′

$(\alpha)_D = +\ 139°.0$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 171°.9$.

2) $p = 0.2004$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé 4°12′⁵; 4°12′

$(\alpha)_D = +\ 138°.5$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 171°.3$.

3) $p = 0.3053$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé 6°24′; 6°25′; 6°24′

$(\alpha)_D = +\ 138°.5$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 171°.3$.

Bromhydrate basique. $\overset{+}{\text{Ap}}.\ \text{Br H} + \text{H}_2\ \text{O}.$

(Eau de cristallisation: trouvé 4.5 p. cent; calculé 4.5 p. cent.)

$p = 0.1474$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{\text{mm}}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 2°50′; 2°47′; 2°50′; 2°48′

$(\alpha)_D = +\ 126°.2$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 168°.7$.

Iodhydrate basique. $\overset{+}{\text{Ap}}.\ \text{J H} + \text{H}_2\ \text{O}.$

(Eau de cristallisation: trouvé 4.3 p. cent, calculé 4.1 p. cent.)

$p = 0.1183$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{\text{mm}}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 2°6′; 2°5′5; 2°6′

$(\alpha)_D = +\ 117°.2$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 175°.5$.

Sulfate basique. $2\,(\overset{+}{\text{Ap}}).\ \text{SO}_4\text{H}_2 + 3\ \text{H}_2\ \text{O}.$

(Eau de cristallisation: trouvé 8.0—8.3 p.cent; calculé 8.0 p.cent.)

$p = 0.0954$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{\text{mm}}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 1°42′5; 1°43′

$(\alpha)_D = +\ 130°.0$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 164°.0$.

Chlorate basique. $\overset{+}{\text{Ap}}.\ \text{Cl O}_3\ \text{H}.$

(Chauffé à 130° C., le sel ne perdit rien de son poids).

1) $p = 0.1377$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{\text{mm}}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 2°40′; 2°42′; 2°42′.

$(\alpha)_D = +\ 129°.0$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 166°.2$.

2) $p = 0.3096$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 6°1′; 5°57′; 5°59′; 5°59′

$(\alpha)_D = + 127°.7$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = + 164°.4$.

Perchlorate basique. $\overset{+}{Ap}. Cl O_4 H + H_2 O$.

(Eau de cristallisation: trouvé 4.2 p. cent; calculé 4.4 p. cent).

$p = 0.1042$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 1°58′; 1°59′; 1°58′

$(\alpha)_D = + 124°.9$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = + 175°.3$.

Oxalate basique. $2 (\overset{+}{Ap}). C_2 H_2 O_4 + 2 H_2 O$,

(Eau de cristallisation: trouvé 8.7 p. cent; calculé 8.6 p. cent).

Ce sel était si peu soluble dans l'eau, que j'ai dû renoncer à en déterminer le p. r. s. dans une solution aqueuse.

Apocinchonine sous l'influence d'un excès d'acide.

Acide chlorhydrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2940 gr.	2	302.8 mm.	9°23′5	
" "	"	" "	9°22′	+ 211°.4
" "	"	" "	9°26′	
" "	"	" "	9°26′5	
0.2964 "	2½	" "	9°29′	
" "	"	" "	9°30′	+ 211°.5
" "	"	" "	9°29′	
0.2938 "	3	" "	9°22′	+ 211°.0
" "	"	" "	9°24′	
0.2964 "	4	" "	9°24′	+ 209°.6
" "	"	" "	9°25′	
0.2954 "	8	" "	9°12′	+ 205°.5
" "	"	" "	9°11′	
0.2932 "	14	" "	8°56′	+ 201°.3
" "	"	" "	8°57′	
0.2950 "	20	" "	8°55′	+ 199°.7
" "	"	" "	8°55′	

Acide bromhydrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2949 gr.	2	302.8 mm.	9°30′	
" "	"	" "	9°31′5	+ 213°.0
" "	"	" "	9°30′5	
0.2934 "	2½	" "	9°27′	
" "	"	" "	9°29′	+ 213°.1
" "	"	" "	9°28′	
0.2952 "	3	" "	9°27′	+ 211°.5
" "	"	" "	9°27′	
0.2782 "	4½	" "	9°15′	+ 218°.7
" "	"	" "	9°15′5	

Acide bromhydrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2941 gr.	7	302.8 mm.	$9^\circ 8'^{5}$	+ 204°.6
" "	"	" "	$9^\circ 9'$	
0.2798 "	10	" "	$9^\circ 59'$	+ 202°.0
" "	"	" "	$9^\circ 1'$	
" "	"	" "	$9^\circ 1'^{5}$	

Acide nitrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calcnlé.
0.2937 gr.	2	302.8 mm.	$9^\circ 22$	+ 210°.7
" "	"	" "	$9^\circ 22'^{5}$	
0.2959 "	2½	" "	$9^\circ 35'$	+ 212°.7
" "	"	" "	$9^\circ 35'$	
0.2917 "	3	" "	$9^\circ 22'^{5}$	+ 212°.1
" "	"	" "	$9^\circ 24'$	
" "	"	" "	$9^\circ 21'$	
" "	"	" "	$9^\circ 21'$	
0.2954 "	4	" "	$9^\circ 29'^{5}$	+ 212°.1
" "	"	" "	$9^\circ 28'^{5}$	
0.2946 "	7	" "	$9^\circ 17'^{5}$	+ 208°.7
" "	"	" "	$9^\circ 18'$	
" "	"	" "	$9^\circ 20'$	
" "	"	" "	$9^\circ 18'$	
0.2959 "	10	" "	$9^\circ 16'$	+ 206°.6
" "	"	" "	$9^\circ 15'$	

Acide chlorique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observe.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2945 gr.	2	302.8 mm.	9°36′	
" "	"	" "	9°38′	+ 215°.4
" "	"	" "	9°35′	
" "	"	" "	9°35′	
0.2936 "	3	" "	9°35′	+ 215°.7
" "	"	" "	9°35′	
0.2942 "	4	" "	9°34′	
" "	"	" "	9°35′	+ 214°.8
" "	"	" "	9°35′	
0.2940 "	7	" "	9°29′5	
" "	"	" "	9°31′5	+ 213°.6
" "	"	" "	9°30′5	
0.2959 "	10	" "	9°27′5	+ 211°.3
" "	"	" "	9°28′	

Acide perchlorique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observe.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2950 gr.	2	302.8 mm.	9°29′	
" "	"	" "	9°31′	+ 213°.0
" "	"	" "	9°32′	
0.2938 "	2½	" "	9°43′	
" "	"	" "	9°41′	+ 218°.0
" "	"	" "	9°41′	
0.2935 "	3	" "	9°40′	+ 217°.5
" "	"	" "	9°40′	
0.2933 "	4	" "	9°40′	+ 217°.1
" "	"	" "	9°39′5	
0.2929 "	7	" "	9°36′	
" "	"	" "	9°34′5	+ 216°.1
" "	"	" "	9°34′	
0.2932 "	10	" "	9°33′	+ 215°.2
" "	"	" "	9°33′	

Acide formique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observe.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2942 gr.	2.16	302.8 mm.	8°53′5	+ 199°.9
" "	"	" "	8°54′5	
0.2932 "	2.70	" "	9°13′5	+ 207°.6
" "	"	" "	9°13′	
0.2932 "	3.24	" "	9°19′	+ 209°.9
" "	"	" "	9°19′	
0.2928 "	4.32	" "	9°22′	+ 211°.3
" "	"	" "	9°22′	
0.2929 "	7.56	" "	9°32′5	+ 215°.0
" "	"	" "	9°32′	
0.2936 "	10.80	" "	9°38′	+ 216°.3
" "	"	" "	9°37′5	
" "	"	" "	9°36′5	
" "	"	" "	9°37′	
0.2942 "	25.92	" "	9°37′	+ 216°.2
" "	"	" "	9°38′	
0.2936 "	45.00	" "	9°33′	+ 214°.8
" "	"	" "	9°33′	

Acide acétique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observe.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2938 gr.	3*	302.8 mm.	7°58′5	+ 180°.3
" "	"	" "	8°1′	
" "	"	" "	8°3′	
" "	"	" "	8°1′	
0.2937 "	4	" "	8°11′5	+ 182°.4
" "	"	" "	8°12′	
0.2928 "	7	" "	8°27′	+ 192°.9
" "	"	" "	8°27′	
0.2961 "	12	" "	8°50′	+ 195°.1
" "	"	" "	8°50′	
0.2946 "	20	" "	8°59′	+ 201°.8
" "	"	" "	9°0′	
" "	"	" "	9°1′	

1) L'apocinchonine ne put pas être dissoute dans moins de 2.8 molécules d'acide acétique.

Acide acétique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2932 gr.	30	302.8 mm.	9°4′	+ 204°.0
" "	"	" "	9°3′	
" "	"	" "	9°3′	
0.2948 "	40	" "	9°8′	+ 204°.7
" "	"	" "	9°8′5	
0.2950 "	50	" "	9°10′5	+ 205°.7
" "	"	" "	9°11′	
0.2949 "	60	" "	9°4′	+ 203°.0
" "	"	" "	9°5′5	
" "	"	" "	9°4′	
0.2958 "	160	" "	8°56′5	+ 199°.6
" "	"	" "	8°57′	

Acide sulfurique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2958 gr.	1	302.8 mm.	9°25′5	+ 210°.7
" "	"	" "	9°26′	
0.2795 "	1½	" "	9°24′5	+ 211°.6
" "	"	" "	9°24′5	
0.2942 "	2	" "	9°29′	+ 212°.9
" "	"	" "	9°29′	
0.2942 "	3	" "	9°22′	+ 210°.6
" "	"	" "	9°22′5	
" "	8	" "	9°23′	
0.2919 "	4	" "	9°19′	+ 210°.6
" "	"	" "	9°18′	
0.2928 "	6	" "	9°14′5	+ 208°.7
" "	"	" "	9°15′5	

Acide oxalique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2956 gr.	1	302.8 mm.	8°34′	
„ „	„	„ „	8°36′	+ 192°.4
„ „	„	„ „	8°36′	
0.2944 „	1½	„ „	9°9′5	
„ „	„	„ „	9°8′	+ 205°.5
„ „	„	„ „	9°10′	
„ „	„	„ „	9°10′	
0.2942 „	2	„ „	9°14′	+ 208°.1
„ „	„	„ „	9°15′	
0.2958 „	2½	„ „	9°16′	+ 206°.9
„ „	„	„ „	9°16′	
0.2934 „	3	„ „	9°9′5	+ 206°.0
„ „	„	„ „	9°9′	
0.2930 „	4	„ „	9°4′	+ 204°.5
„ „	„	„ „	9°5′	
0.2940 „	5	„ „	9°6′	
„ „	„	„ „	9°7′	+ 204°.6
„ „	„	„ „	9°6′	
0.2964 „	8	„ „	9°5′	+ 202°.5
„ „	„	„ „	9°5′	

Acide phosphorique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2948 gr.	1 3/10	302.8 mm.	8°21′	+ 187°.5
„ „	„	„ „	8°23′	
0.2920 „	1½	„ „	8°57′	
„ „	„	„ „	9°0′	+ 202°.9
„ „	„	„ „	8°58′	
„ „	„	„ „	8°57′	
0.2930 „	1¾	„ „	9°18′	+ 211°.8
„ „	„	„ „	9°17′	
0.2939 „	2	„ „	9°30′5	+ 213°.5
„ „	„	„ „	9°30′5	

Acide phosphorique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2952 gr.	2½	302.8 mm.	9°31′	+ 212°.9
„ „	„	„ „	9°31′	
0.2942 „	3	„ „	9°29′5	+ 213°.1
„ „	„	„ „	9°29′	
„ „	„	„ „	9°30′	
0.2933 „	5	„ „	9°27′	+ 213°.0
„ „	„	„ „	9°27′	
0.2931 „	10	„ „	9°19′	+ 210°.0
„ „	„	„ „	9°20′	

Acide citrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.2946 gr.	1	302.8 mm.	8°9′	+ 182°.4
„ „	„	„ „	8°8′	
0.2937 „	1½	„ „	8°29′	+ 191°.0
„ „	„	„ „	8°30′	
0.2940 „	2	„ „	9°2′	+ 202°.7
„ „	„	„ „	9°0′	
0.2939 „	2½	„ „	9°4′	+ 203°.8
„ „	„	„ „	9°5′	
„ „	„	„ „	9°3′	
0.2941 „	4	„ „	9°10′	+ 206°.1
„ „	„	„ „	9°11′	
0.2952 „	8	„ „	9°10′	+ 205°.0
„ „	„	„ „	9°9′	
0.2948 „	12	„ „	9°4′5	+ 203°.0
„ „	„	„ „	9°3′	

Hydrochlorapocinchonine.

Pour préparer l'hydrochlorapocinchonine, j'ai suivi les prescriptions de MM. Zorn et Hesse. Les observations que j'ai faites à cette occasion ne concordent pas absolument avec celles de M. Hesse. Lorsque la cinchonine était dissoute dans un excès d'acide chlorhydrique, que le liquide était ensuite saturé de gaz chlorhydrique à —18° C, et qu'enfin la masse était chauffée 5 à 6 heures, dans un matras bouché, à la température de 140°—150° C, on n'obtenait pas toujours un produit identique. Tantôt sa couleur était plus claire, tantôt plus foncée, et l'addition d'un égal volume d'eau ne déterminait pas toujours immédiatement le dépôt de cristaux du bichlorhydrate d'hydrochlorapocinchonine. Parfois il se formait une quantité assez considérable de diapocinchonine, d'autres fois cela n'était pas le cas. Il me paraît probable que le dépôt du bichlorhydrate est souvent entravé par la présence d'autres corps dans le liquide; en effet, lorsque au bout de quelques jours le liquide était séparé des cristaux par la filtration, puis abandonné longtemps à lui même, il fournissait souvent une nouvelle quantité du sel. Bien que j'aie opéré avec des quantités différentes d'acide chlorhydrique, et aussi à des températures différentes, je n'ai pas réussi à trouver nne méthode plus avantageuse sous le rapport du produit en bichlorhydrate.

En ce qui concerne du reste les propriétés physiques du bichlorhydrate et de la base isolée, mes observations confirment en général celles de M. Hesse; seulement à l'égard du p. r. s. de la base j'ai obtenu, comme on le verra tout à l'heure, des résultats tout différents. Il en est de même à l'égard du caractère chimique de l'hydrochlorapocinchonine.

Pour m'assurer que j'avais bien affaire à la base nommée hydrochlorapocinchonine par M. Hesse, j'ai dosé le chlore de la base libre, ainsi que celui qui existe sous la forme d'acide chlorhydrique dans le bichlorhydrate.

Les résultats de ces dosages sont les suivants:

1) 0.2872 gr. de la base pure, décomposés par la calcination avec Na_2CO_3 pur, fournirent ensuite 0.1244 gr. Ag Cl. On déduit de là, pour la teneur en Cl, 10,71 pour cent. La formule exige une teneur de 10,74 pour cent.

2) 0.4380 gr. du bichlorhydrate, dissous dans l'eau et précipités par le nitrate d'argent, donnèrent 0.3090 gr. Ag Cl. Il en résulte, pour la proportion de chlore, 17,46 pour cent. La formule demande 17,59 pour cent.

Ces résultats, joints à la circonstance que j'avais employé, comme matière première dans la préparation du sel, de la cinchonine bien purifiée, ne laissent aucun doute quant à l'identité de la substance étudiée par moi et de l'hydrochlorapocinchonine.

Pour le p. r. s. de la base libre, dissoute dans l'alcool à 97 pour cent en volume, j'ai obtenu les valeurs suivantes:

1) $p = 0.0949$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ mm.; $t = 18$° C.

α_D observé: 3°.3′; 3°.1′; 3°.3′.

$(\alpha)_D = + 211°. \pm 1°.$

2) $p = 0.0531$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ mm.; $t = 16°$ C.

α_D observé: 1°.39; 1°.41′; 1°.43′; 1°.43′.

$(\alpha)_D = + 210°. \pm 2°.$

Ces chiffres sont plus élevés que celui donné par M. Hesse (+ 205°.4); pourtant, les circonstances dans lesquelles M. Hesse a opéré sont sensiblement les mêmes que celles de ma première détermination.

Sels d'hydrochlorapocinchonine.

Ainsi que je l'ai déjà rappelé au commencement de ce Mémoire, M. Hesse dit que l'hydrochlorapocinchonine ne paraît pas former de sels neutres, mais seulement des sels acides.

Cette propriété, assurément très singulière chez une base biacide, il l'attribue également à l'hydrochlorapoquinidine. M. Hesse a-t-il réellement essayé d'obtenir des sels neutres (basiques, selon ma manière de voir) des alcaloïdes en question ? Rien ne l'indique dans son Mémoire. Quoi qu'il en soit, je puis affirmer que la formation de ces sels a généralement lieu sans la moindre difficulté, quand la base libre est mise en contact avec la quantité calculée d'acide, dans une solution alcoolique étendue. Dans le cas seulement où l'on voudra préparer des sels d'acides faibles, tels que l'acide formique, l'acide acétique, etc., il pourra être nécessaire, pour obtenir un sel basique, d'employer un peu plus d'acide que la quantité calculée. J'ai préparé de cette manière les chlorhydrate, sulfate, nitrate, chlorate et perchlorate basiques, dont les quatre premiers sont assez solubles dans l'eau pour qu'on puisse en déterminer le p. r. s.

Dans ce qui suit, je donne la description des sels basiques et neutres ainsi préparés et étudiés par moi.

Chlorhydrate basique [1]). $(\mathrm{Cl}\,\overset{+}{\mathrm{Ap}}\,\mathrm{H}) + \mathrm{Cl\,H} + \mathrm{H_2\,O}$. Très fines aiguilles, difficilement solubles dans l'eau, plus solubles dans l'alcool.

(eau de cristallisation: trouvé 5,2 p. cent; calculé 5,2 p. cent).

(Cl (comme Cl H) trouvé 9,1 p. cent; calculé 9,2 p. cent).

$p = 0{,}0900$; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8$ mm.; $t = 16°$ C.

α_D observé: $2°.16'$; $2°.15'$; $2°.16'^5$.

$(\alpha)_D = + 165°.9$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = + 193°.2$.

Chlorhydrate neutre, $(\mathrm{Cl}\,\overset{+}{\mathrm{Ap}}\,\mathrm{H}), 2\,\mathrm{Cl\,H}$. Chauffé à 130 C., le sel ne perdait rien de son poids).

---

[1]) Pour abréger, je représente la base par le signe $\mathrm{Cl}\,\overset{+}{\mathrm{Ap}}\,\mathrm{H}$.

$p = 0.3948$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 11°.2′; 11°.4′; 11°.1′.

$(\alpha)_D = + 185°.0$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = + 226°.0$.

Bromhydrate neutre. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H) + 2\ Br\ H$. Ce sel ressemble complètement au chlorhydrate neutre et donne, comme lui de superbes cristaux. Il se dissout plus difficilement dans l'eau que le sel précédent, et est probablement anhydre.

Sulfate basique. $2\ (Cl\ \overset{+}{Ap}\ H),\ SO_4\ H_2 + 3\ H_2\ O$. Aiguilles excessivement fines, peu solubles dans l'eau, un peu plus solubles dans l'alcool.

(Eau de cristallisation: trouvé 6.8 p. cent, calculé 6.6 p. cent.)

1) $p = 0.1013$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 2°25′5; 2°24′.

$(\alpha)_D = + 156°.6$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = + 192°.5$.

Nitrate basique. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H),\ NO_3\ H$. Jolies aiguilles déliées, difficilement solubles dans l'eau, assez solubles dans l'alcool. Séché à 130° C, le sel ne perd rien de son poids; il ne contient pas d'eau de cristallisation.

$p = 0.0985$ gr.; $V = 20.02$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 2°26′5; 20°26′.

$(\alpha)_D = + 173°.5$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = + 194°.8$.

Chlorate basique. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H),\ Cl\ O_3\ H$. Par ses caractères extérieurs, ce sel ressemble beaucoup au nitrate basique, mais il est un peu plus soluble dans l'eau; il ne renferme pas d'eau

de cristallisation et ne perd rien de son poids quand on le chauffe, du moins jusqu'à 130° C.

$p = 0.1000$ gr.; $V = 20$ C.C.; $l = 302.8^{mm}$; $t = 16°$ C.

α_D observé: 2°.23′; 2°.20′^5; 2°.21′^5; 2°.20′,

$(\alpha)_D = +\ 155°.3$

calculé pour l'alcaloïde $(\alpha)_D = +\ 194°.9$.

Perchlorate basique. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H)\ .\ Cl\ O_4\ H + xH_2\ O$. Ce sel donne de très beaux cristaux pendant le refroidissement de sa dissolution, saturée à chaud, dans l'alcool faible. Il est trop peu soluble dans l'eau pour qu'on puisse en déterminer le p. r. s. avec quelque exactitude.

Oxalate neutre. $(Cl\ \overset{+}{Ap}\ H)\ .\ C_2\ H_2\ O_4 + xH_2\ O$. Aiguilles fibroïdes, blanches, peu solubles dans l'eau, assez facilement solubles dans l'alcool.

Hydrochlorapocinchonine sous l'influence d'un excès d'acide.

Acide chlorhydrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3948 [1]) gr. de sel neutre	2	302.8 mm.	11°2′	
	,,	,, ,,	11°4′	+ 226°.8
,,	,,	,, ,,	11°1′	
0,4017 gr. de sel	3	,, ,,	11°8′	+ 223°.8
neutre + 1 mol. Cl H	,,	,, ,,	11°9′	
0.4039 gr. de sel	4	,, ,,	11°9′5	+ 223°.0
neutre + 2 mol. Cl H	,,	,, ,,	11°11′	
0.4034 gr. de sel	6	,, ,,	11°5′	+ 221°.6
neutre + 4 mol. Cl H	,,	,, ,,	11°5′	
0.4063 gr. de sel	8	,, ,,	11°1′	+ 219°.9
neutre + 6 mol. Cl H	,,	,, ,,	11°0′	

Acide bromhydrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3294 gr.	2	302.8 mm.	11°14′	+ 225°.2
,, ,,	"	" "	11°13′5	
0.3321 ,,	3	" "	11°11′	
,, ,,	"	" "	11°13′	+ 223°.0
,, ,,	"	" "	11°14′	
0.3310 ,,	6	" "	11°3′	+ 220°.6
,, ,,	"	" "	11°3′	
0.3317 ,,	10	" "	10°53′ [2]	+ 217°.7

1) Les valeurs ici mentionnées sont déduites de l'observation concernant le p. r. s. d'une solution aqueuse du chlorhydrate neutre (voir p. 407). Dans les expériences suivantes, le même sel fut employé, avec addition d'acide chlorhydrique.

2) Lorsque la première série de déterminations avec ce liquide fut achevée, le sel neutre commença à se déposer dans le tube.

Acide nitrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3296 gr.	2	302.8 mm.	11°15′5	+ 225°.3
” ”	”	” ”	11°14′	
0.3300 ”	3	” ”	11°18′	+ 226°.2
” ”	”	” ”	11°18′5	
0.3288 ”	4	” ”	11°11′5	+ 225°.2
” ”	”	” ”	11°13′5	
0.3297 ”	10	” ”	10°59′	+ 220°.3
” ”	”	” ”	10°59′	

Acide chlorique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	*l.*	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3289 gr.	2	302.8 mm.	11°22′	+ 228°.5
” ”	”	” ”	11°23′	
0.3295 ”	3	” ”	11°26′	+ 229°.3
” ”	”	” ”	11°27′	
0.3290 ”	4	” ”	11°29′	+ 230°.7
” ”	”	” ”	11°30′	
0.3302 ”	5	” ”	11°17′5	
” ”	”	” ”	11°19′5	+ 226°.3
” ”	”	” ”	11°19′5	
0.3242 ”	8	” ”	10°59′5	+ 223°.9

Acide perchlorique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3280 gr.	3 [1])	302.8 mm.	11°20′	+ 228°.1
” ”	”	” ”	11°19′	
0.3301 ”	4	” ”	11°24′5	+ 228°.5
” ”	”	” ”	11°25′5	
0.3290 ”	5	” ”	11°19′	+ 227°.1
” ”	”	” ”	11°18′	
0.3292 ”	5	” ”	11°15′	+ 225°.9
” ”	”	” ”	11°16′	

Acide formique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3290 gr.	2	302.8 mm.	10°44′	+ 215°.4
” ”	”	” ”	10°43′	
0.3295 ”	3	” ”	11°3′	+ 222°.0
” ”	”	” ”	11°5′	
” ”	”	” ”	11°5′	
0.3282 ”	4	” ”	11°13′	+ 225°.8
” ”	”	” ”	11°13′5	
0.3306 ”	6	” ”	11°26′	+ 228°.5
” ”	”	” ”	11°26′	
0.3290 ”	8	” ”	11°25′	+ 228°.7
” ”	”	” ”	11°23′	
” ”	”	” ”	11°22′5	
0.3291 ”	20	” ”	11°25′	+ 229°.2
” ”	”	” ”	11°25′	
0.3318 ”	30	” ”	11°25′	+ 228°.2
” ”	”	” ”	11°27′	
0.3282 ”	40	” ”	11°20′	+ 227°.9
” ”	”	” ”	11°19′	

[1]) Par l'addition de 2 molécules ClO_4H à 1 mol. de l'alcaloïde il se forma bien un perchlorate, mais celui-ci ne put être maintenu dissous, à 16° C, dans la quantité de liquide employée.

Acide acétique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3298 gr.	8 [1]	302.8 mm.	10°55′	+ 218°.7
" "	"	" "	10°55′	
0.3300 "	12	" "	11°0′	+ 219°.9
" "	"	" "	10°58′	
" "	"	" "	10°58′5	
0.3296 "	20	" "	11°8′5	+ 223°.3
" "	"	" "	11°8′5	
0.3317 "	30	" "	11°21′5	+ 226°.4
" "	"	" "	11°23′	
" "	"	" "	11°22′	
0.3310 "	40	" "	11°22′	+ 226°.9
" "	"	" "	11°22′	
0.3330 "	48	" "	11°18′5	+ 226°.4
" "	"	" "	11°18′5	
0.3288 "	64	" "	11°16′	+ 225°.9
" "	"	" "	11°16′	

Acide sulfurique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3298 gr.	1	302.8 mm.	11°18′	+ 226°.3
" "	"	" "	11°18′	
0.3302 "	1½	" "	11°23′	+ 227°.4
" "	"	" "	11°22′	
0.3325 "	2	" "	11°24′5	+ 227°.2
" "	"	" "	11°25′	
0.3314 "	3	" "	11°21′5	+ 226°.3
" "	"	" "	11°21′	
0.3297 "	8	" "	11°13′	+ 224°.8
" "	"	" "	11°13′	

[1]) Il n'était guère possible d'obtenir l'alcaloïde en solution avec moins de 8 mol. d'acide acétique.

Acide oxalique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3298 gr.	1½ [1]	302.8 mm.	10°57′	+ 219°.4
" "	"	" "	10°57′	
0.3295 "	2	" "	11°12′	+ 224°.5
" "	"	" "	11°11′5	
0.3294 "	3	" "	11°12′	+ 224°.4
" "	"	" "	11°11′	
" "	"	" "	11°11′	
0.3271 "	4	" "	11°3′5	+ 223°.5
" "	"	" "	11°4′	
0.3314 "	5	" "	11°8′	+ 222°.6
" "	"	" "	11°8′	

Acide phosphorique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3268 gr.	1⅔ [2]	302.8 mm.	11°21′5	+ 229°.0
" "	"	" "	11°20′	
" "	"	" "	11°18′	
0.3294 "	2	" "	11°33′	+ 231°.7
" "	"	" "	11°33′	
0.3296 "	3	" "	11°40′	+ 233°.9
" "	"	" "	11°40′	
0.3300 "	4	" "	11°43′	+ 234°.5
" "	"	" "	11°43′	
0.3307 "	5	" "	11°41′	+ 234°.0
" "	"	" "	11°43′5	
" "	"	" "	11°44′	
0.3308 "	7	" "	11°25′	+ 227°.7
" "	"	" "	11°25′	

[1]) Avec 1 mol. d'acide oxalique, l'alcaloïde ne se laissa pas dissoudre.

[2]) Avec moins de $1^{2}/_{3}$ mol. d'acide phosphorique, l'alcaloïde ne se laissa pas dissoudre.

Acide citrique.

Poids d'alcaloïde sur 20 C.C. de la solution.	Nombre de molécules d'acide sur 1 molécule de l'alcaloïde.	l.	α_D observé.	$(\alpha)_D$ calculé.
0.3300 gr.	2 [1]	302.8 mm.	10°55′	+ 218°.5
" "	"	" "	10°55′	
0.3295 "	3	" "	11°5′	
" "	"	" "	11°6′	+ 222°.3
" "	"	" "	11°5′	
0.3297 "	4	" "	11°6′5	
" "	"	" "	11°8′5	+ 222°.9
" "	"	" "	11°7′	
0.3285 "	5	" "	11°6′5	+ 223°.4
" "	"	" "	11°7′	
" "				
0.3303 "	6	" "	11°7′	+ 222°.2
" "	"	" "	11°6′5	
" "				

[1]) Il fut impossible de dissoudre l'alcaloïde avec moins de 2 mol. d'acide citrique.

Des résultats obtenus, il résulte avec toute évidence que les deux bases examinées suivent, quant aux modifications du p. r. s. sous l'influence des acides, les mêmes lois que les quatre alcaloïdes du quinquina que j'ai étudiés antérieurement [1]). On pourra s'en convaincre par un simple coup d'œil jeté sur les tableaux suivants, dans lesquels je donne le p. r. s. des deux bases, tel qu'il se présente dans les dissolutions de sels basiques et neutres, ainsi que le maximum du p. r. s.

[1]) Voir surtout: *Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas*, t. I, p. 18—40.

Apocinchonine.

Noms des acides.	P. R. S. de la base dans les solutions de sels basiques.	P. R. S. de la base dans les solutions des sels neutres.	Maximum du p. r. s.
Acide chlorhydrique.	+ 171°.3	+ 211°.4	+ 211°.5
,, bromhydrique.	+ 168°.7	+ 213°.0	+ 213°.1
,, iodhydrique. .	+ 175°.5	—	—
,, nitrique	—	+ 210°.7	+ 212°.7
,, chlorique . . .	+ 166°.2	+ 215°.4	+ 215°.7
,, perchlorique .	+ 175°.2	+ 213°.0	+ 218°.0
,, formique . . .	—	+ 199°.9	+ 216°.3
,, acétique. . . .	—	(3 mol.) + 180°.3	+ 205°.7
,, sulfurique. . .	+ 164°.0	+ 210°.7	+ 212°.9
,, oxalique . . .	—	+ 192°.4	+ 208°.1
,, phosphorique .	—	—	+ 213°.5
,, citrique	—	—	+ 206°.1

Hydrochlorapocinchonine.

Noms des acides.	P. R. S. de la base dans les solutions de sels basiques.	P. R. S. de la base dans les solutions des sels neutres.	Maximum du p. r. s.
Acide chlorhydrique.	+ 193°.2	+ 226°.8	+ 226°.8
,, bromhydrique.	—	+ 225°.2	+ 225°.2
,, nitrique	+ 194°.8	+ 225°.3	+ 226°.2
,, chlorique . . .	+ 194°.9	+ 228°.5	+ 230°.7
,, perchlorique .	—	(3 mol.) + 228°.1	+ 228°.5
,, formique . . .	—	+ 215°.4	+ 229°.2
,, acétique. . . .	—	—	+ 226°.9
,, sulfurique. . .	+ 192°.5	+ 226°.3	+ 227°.4
,, oxalique . . .	—	(1½ mol.) + 219°.4	+ 224°.5
,, phosphorique .	—	—	+ 234°.5
,, citrique	—	—	+ 223°.4

Nous voyons que les maxima du p. r. s. sont, entre certaines limites, très rapprochés les uns des autres, et qu'il n'y a pas non plus de grandes différences dans les chiffres trouvés pour le p. r. s. des alcaloïdes dans les solutions de leurs divers sels basiques; il faut bien remarquer, d'ailleurs, que ces sels basiques, à cause de leur faible solubilité, n'ont pas pu être examinés dans les mêmes conditions de concentration.

Finalement, nous arrivons à conclure que l'assertion de M. Hesse, relative à l'égalité du p. r. s. de l'hydrochlorapocinchonine dans les sels basiques et neutres, manque de tout fondement.

Delft, 3 juin 1882.

SUR LA

PERCEPTION DE LA LUMIÈRE

ET DE LA

COULEUR CHEZ LES ORGANISMES LES PLUS INFÉRIEURS,

PAR

TH. W. ENGELMANN.

Depuis longtemps on connaît, parmi les plantes et les animaux les plus simples, des organismes dont les mouvements sont influencés par la lumière. Le plus souvent, ce sont des formes vertes, ou du moins colorées, qui se meuvent librement dans l'eau au moyen de cils vibratiles ou par quelque autre mécanisme (zoospores d'Algues, Diatomacées, Oscillarinées, quelques Bactéries, Flagellés, Infusoires ciliés, etc.). Mais il y a aussi différentes formes non colorées (plasmodies de Myxomycètes, *Pelomyxa*, gamètes de *Chytridium vorax*) qui possèdent cette propriété.

L'influence de la lumière peut se manifester de manières très diverses: la direction, la rapidité, la forme et la durée du mouvement peuvent changer. En outre, l'intensité et la qualité de la réaction varient ordinairement, d'une part avec la nature, l'intensité et la direction de la lumière incidente, d'autre part avec l'espèce de l'organisme, et aussi avec l'individu et avec la phase de développement où il se trouve.

De nombreuses formes intermédiaires rattachent ces phénomènes, d'un côté aux différentes actions photocinétiques qu'on observe chez les plantes plus élevées (déplacement des grains de chlorophylle, phénomènes d'héliotropisme, de nyctitropisme, etc.), d'un autre côté au processus spécifique de la perception lumineuse dans l'organe visuel des animaux supérieurs.

Je n'ai pas besoin d'insister sur la haute portée d'une étude détaillée et approfondie de ces phénomènes Au point de vue physiologique comme au point de vue phylogénétique, leur importance est égale. Jusqu'ici, toutefois, cette étude est à peine ébauchée, et on a commencé seulement à rassembler et à décrire un certain nombre de faits. Quant à la façon dont la lumière provoque les susdites réactions des organismes les plus élémentaires, quant au rapport causal des processus qui s'y passent, notre connaissance est encore absolument nulle. Tout ce qui tend à jeter quelque jour sur ces questions ne peut donc être que bienvenu.

Dans les pages suivantes, je me propose de communiquer quelques faits, qui prouvent que la lumière peut influer au moins de trois manières essentiellement différentes sur les mouvements des organismes les plus simples, savoir:

1°. *directement*, *par une modification des échanges gazeux*, sans intervention appréciable de quelque sensation;

2°. *par la modification de la sensation du besoin respiratoire*, *à la suite d'une modification des échanges gazeux;*

3°. *par l'intermédiaire d'un processus spécifique probablement correspondant à notre perception lumineuse.*

Ces trois processus peuvent se trouver combinés chez le même individu; le premier peut aussi se présenter à part, ou seulement associé au second Quant à la coexistence du premier avec le troisième, sans immixtion du second, je n'ose rien affirmer; mais je la regarde comme improbable, parce que la sensation du besoin respiratoire est beaucoup plus généralement répandue que la sensation spécifique de la lumière.

La manière dont ces processus dépendent de la nature et de l'intensité de la lumière, ainsi que des autres circonstances extérieures, est différente pour chacun d'eux. Par suite, les réactions produites sous l'influence de conditions différentes peuvent différer notablement. Agitation violente et repos complet, photophobie et photophilie, mouvement progressif en ligne droite et rotation sans translation, changement de forme sans change-

ment de place et phénomène inverse, tout cela s'observe, comme effet de la même lumière sur le même individu, dans des circonstances différentes.

Pour arriver à une analyse satisfaisante des phénomènes, il faut partir des cas où l'on n'a affaire qu'à un seul des processus en question. ou dans lesquels, du moins, la possibilité existe d'isoler convenablement les divers processus partiels.

Sous ce rapport, les organismes qui se recommandent spécialement sont: pour le processus mentionné ci-dessus en 1°, *Navicula*, pour celui en 2°, *Paramecium bursaria*, pour celui en 3°, *Euglena viridis*, organismes qui abondent presque partout dans nos eaux douces.

I. Type: Navicula.

A ce type appartiennent la plupart des Diatomacées et Oscillarinées qui exécutent des mouvements. On peut y rattacher aussi, en principe, les cellules chlorophyllifères à protoplasme mobile des plantes supérieures (du *Vallisneria*, par exemple). Mes expériences ont porté principalement sur différentes espèces de *Navicula* et de *Pinnularia*, qui, sous les rapports essentiels, réagissaient toutes de la même manière.

Les mouvements de ces organismes dépendent de la présence de l'oxygène libre. Ils cessent, parfois immédiatement, à la suite d'une soustraction complète de ce gaz, pour reparaître aussitôt qu'il a de nouveau accès. A l'aide de la réaction bactérienne [1]), ce fait peut facilement être mis en évidence. L'optimum du mouvement est toutefois déjà atteint lorsque l'oxygène n'a encore qu'une tension de beaucoup inférieure à sa tension normale; au-dessous de cet optimum, l'énergie [2]) des mouve-

---

[1]) *Neue Methode zur Untersuchung der Sauerstoffausscheidung thierischer u. pflanzl. Organismen*, dans: *Botan. Zeitung*, 1881, N°. 28; Pfluger's *Archiv*, XXV, 1881, p. 285.

[2]) Pour mesure de l'énergie, je prends la vitesse moyenne des mouvements durant un intervalle de temps qui ne soit pas trop court, durant une minute, par exemple.

ments croît et décroît avec la tension de l'oxygène. Il est facile de s'en convaincre par des expériences dans la chambre humide, en opérant avec l'air, l'hydrogène et l'oxygène.

Lorsqu'elles ne reçoivent pas d'O libre du milieu ambiant, les Naviculacées peuvent se mouvoir aux dépens de l'oxygène qu'elles-mêmes produisent à la lumière. Cela doit être inféré du fait que la lumière excite les mouvements lorsqu'ils ont cessé *à l'obscurité par suite du défaut d'oxygène*, tandis que, *en cas d'apport suffisant d'O du dehors*, *la lumière n'exerce pas d'influence sensible sur l'énergie des mouvements.* Les Navicules contiennent, on le sait, de la chromophylle jaune [1]), qui à la lumière dégage de l'oxygène. La méthode bactérienne nous a appris comment ce dégagement d'O dépend de la longueur d'onde et de l'intensité de la lumière. Or, cette même relation existe aussi entre la longueur d'onde et l'action photocinétique de la lumière.

A l'aide de l'objectif microspectral que j'ai décrit ailleurs [2]), on peut très facilement étudier, qualitativement et quantitativement, ces effets de la lumière. Je me bornerai à communiquer quelques-uns des faits les plus intéressants.

Lorsqu'une Navicule, dans l'obscurité et sous le couvre-objet hermétiquement clos, était arrivée depuis peu de minutes au repos par suite du manque d'O [3]), elle reprenait au bout de

---

[1]) Sur les chromophylles, voir ma conférence: *Lichtabsorptie en assimilatie in plantencellen*, dans *Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap. Utrecht*, 1882 et „*Farbe und Assimilation*". *Onderzoek. gedaan in het physiol. laborat.* Utrecht, VII, 1882, p. 209. *Botan. Zeit.*, 1883, N°. 1 suiv.

[2]) *Proc. verb. der Kon. Akad. van Wetensch. te Amsterdam. Afd. Natuurk. Zitting van* 25 *Febr.* 1882. Voir aussi: *Botan. Zeit.*, N°. 26, 1882, et Pflüger's *Archiv*, XXVII, 1882, p. 485.

[3]) Pour enlever autant que possible l'oxygène à la goutte, le mieux est d'ajouter à celle-ci un peu d'un liquide renfermant beaucoup de bactéries mobiles, mais du reste inoffensif. Le verre couvre-objet est luté à la vaseline. Les bactéries absorbent rapidement tout l'O libre. Là où elles sont arrivées au repos, la goutte est suffisamment privée d'oxygène: les mouvements des Navicules s'arrêtent alors aussi au bout de quelque temps, parfois même immédiatement, pourvu, bien entendu, que l'accès soit suffisamment interdit à la lumière.

quelques secondes ses mouvements, quand on la plaçait dans la partie rouge du microspectre de la lumière du gaz. Amenée dans le vert ou dans le violet, elle s'arrêtait de nouveau, pour ne recommencer à se mouvoir qu'après un élargissement très considérable de la fente lumineuse. La largeur de la fente doit être plus grande pour le violet que pour le bleu, et plus grande pour le bleu que pour le vert. Le retour dans la lumière rouge produisait le même effet que l'élargissement de la fente. La partie extrême du rouge visible (en avant de B) agissait beaucoup plus faiblement que le rouge entre B et C. L'ultra-rouge et l'ultra-violet se montraient complètement inactifs.

Ces relations avec la longueur d'onde sont exactement les mêmes que celles du dégagement d'O chez les Naviculacées, telles que la méthode des bactéries les a fait connaître [1]) Ce dégagement n'a également lieu que dans la partie visible du spectre; sa valeur relative (en centièmes de la valeur maximum, correspondant au rouge entre B et C) était en moyenne, dans le spectre de la même flamme de gaz:

dans le rouge	extrême	(*a*)	22.7
„ „	vert	(*E* ½ *b*)	14.1
„ „	bleu	(*F*)	6.9
„ „	violet	(*G*)	1.2.

Lorsque, accidentellement, le mouvement de la Navicula la portait en dehors de la limite de la lumière, dans l'obscurité, ou de la partie rouge du microspectre dans la partie verte, elle y tombait bientôt dans une immobilité complète, à moins que, changeant de direction, elle ne fût ramenée dans la lumière ou, respectivement, dans le rouge. Ce rebroussement, toutefois, arrivait dans un nombre de cas relativement si petit, que probablement on doit le regarder comme un pur effet du hasard, et non comme la preuve d'une faculté de discernement, par laquelle la cellule réglerait sa marche. Ces expériences, bien

---

[1]) *Lichtabsorptie en assimilatie* etc., p. 10.

entendu, furent faites, de même que les précédentes, avec une goutte exempte, autant que possible, d'oxygène.

L'*intensité lumineuse minima*, exigée pour le réveil des mouvements, était toujours à peu près égale à celle qu'on devait employer pour obtenir un dégagement d'O nettement appréciable à l'aide de bactéries sensibles. Généralement, elle paraissait être un peu moindre; mais le contraire se présentait aussi, et en tout cas les différences étaient insignifiantes, comparées à celles qui dépendent de l'inégalité de sensibilité des individus. Même pour le rouge compris entre B et C, l'intensité minima en question était ordinairement beaucoup plus considérable que celle relative à l'œil. Un éclairage modéré agit donc encore, en général, tout comme l'obscurité complète, ce qui offre naturellement, surtout quand on opère avec de forts grossissements, de grands avantages pratiques.

II. Type: Paramecium bursaria.

Chez le Paramécium vert et chez d'autres Ciliés chlorophyllifères (*Stentor viridis*, *Bursaria*, etc.), les actions de la lumière sont plus complexes et d'un ordre plus élevé. Les phénomènes nous obligent à admettre ici l'existence de sensations, qui règlent les mouvements d'une manière appropriée au but, sans avoir toutefois rien de commun avec la perception lumineuse au sens ordinaire, c'est-à-dire, avec la *vision*.

Ici encore, l'étude des effets de la lumière en cas de tensions différentes de l'oxygène est la voie indiquée pour arriver à l'explication des phénomènes.

Quand l'eau contient la proportion normale d'oxygène, ou un peu plus, les animalcules sont ordinairement très tranquilles, restant longtemps à peu près à la même place. *Ils ne réagissent alors pas du tout*, *ni sous l'influence de la lumière ou de l'obscurité*, *ni sous celle des changements dans la couleur de la lumière.*

Lorsque la tension de l'oxygène ne s'abaisse que peu au-dessous de sa valeur normale, les animalcules deviennent inquiets et cherchent des places où il y ait plus d'oxygène. Ont-ils, par

exemple, été maintenus quelque temps [1]) *à l'obscurité*, dans la goutte recouverte d'un verre médiocrement grand, on les trouve accumulés près du bord du verre, donc près de l'air, ou, s'il y avait dans la goutte des bulles d'air un peu grosses, rassemblés autour de celles-ci. Ils s'y tiennent alors ordinairement aussi tranquilles que dans la goutte non recouverte.

Si la goutte, toutes conditions égales d'ailleurs, est conservée *à la lumière* (la lumière diffuse ordinaire du jour est suffisante) les susdites accumulations ne se produisent pas, les animalcules demeurant, en apparence avec le même plaisir, sous tous les points du couvre-objet. Parfois, surtout quand l'éclairage est faible, ils forment çà et là de petits groupes.

Lorsque la tension de l'oxygène est diminuée notablement, par exemple en faisant passer de l'hydrogène pur sur la goutte suspendue à découvert dans la chambre à gaz, ou en la laissant longtemps dans l'obscurité sous le couvre-objet hermétiquement clos, les animalcules nagent avec inquiétude deçà et delà, puis s'élancent enfin avec une assez grande vitesse en ligne droite, en même temps que leur corps, qui peu à peu passe de la forme aplatie normale à une forme ellipsoïdale plus allongée, tourne autour de son axe longitudinal. Si alors on les éclaire *fortement* pendant quelques minutes, de préférence avec de la lumière blanche ou rouge, ils peuvent redevenir tranquilles et plats. En cet état, *ils réagissent nettement aux changements dans l'intensité et la couleur de la lumière.* Ont-ils, par exemple, franchi accidentellement la limite du clair et de l'obscur, ils rétrogradent immédiatement, comme si l'obcurité leur était désagréable.

Du bleu et du vert, dans le spectre de la lumière du gaz, ils se portent vers le rouge, de préférence vers le rouge d'en-

---

[1]) Il va sans dire que la *durée* de ce temps dépend des dimensions de la goutte, ainsi que de la masse et de la nature des organismes consommateurs d'O qu'elle renferme. On peut la réduire à un petit nombre de minutes, en ajoutant à la goutte un peu de liquide contenant des bactéries bien mobiles. Celles-ci absorbent bientôt une grande partie de l'oxygène qui se trouve sous le verre couvre-objet.

viron 0.65—0.70 μ de longueur d'onde (B—C de Fraunhofer). Quand ils sont arrêtés dans ce rouge, et qu'on les amène ensuite dans une lumière de longueur d'onde plus grande, ou plus petite, ils deviennent bientôt inquiets. Plus le changement est grand, plus la réaction est rapide; au minimum, elle a lieu en un temps infiniment court, au maximum, au bout de plus de 10 secondes. Même quand la longueur d'onde change avec une extrême lenteur, l'agitation finit par se manifester, pourvu que le changement soit assez considérable. Un certain degré d'accommodation paraît avoir lieu en ce cas. Si l'on renforce la lumière, ou qu'on ramène les infusoires dans le rouge de départ, ils redeviennent tranquilles, etc.

L'ultra-rouge et l'ultra-violet produisent toujours le même effet que l'obscurité. Le violet agit plus faiblement que le bleu (F), le bleu à peine plus faiblement — dans le microspectre de la lumière solaire, même un peu plus fortement — que le vert ($E \frac{1}{2} b$); le jaune et l'orangé, de même que le rouge visible extrême, ont aussi une action beaucoup plus faible que le rouge entre B et C.

L'explication de ces phénomènes consiste évidemment en ceci, que les Paramécies sont très sensibles aux différences de tension de l'oxygène et que, en cas d'apport insuffisant d'O du dehors, il peut être satisfait aux besoins respiratoires, devenus plus pressants, par l'oxygène que dégagent les granulations chlorophylliennes situeés *à l'intérieur du corps*, dans le mésoplasme et l'endoplasme. A l'aide de la méthode des bactéries, j'ai déjà montré, l'année dernière [1]), que ces granulations, de même que les correspondantes d'autres animaux inférieurs (*Hydra viridis*, *Spongilla*) sont de vrais grains de chlorophylle, c'est-à-dire, dégagent de l'oxygène sous l'influence de la lumière.

J'ai trouvé que le dégagement d'oxygène par la chlorophylle dépend de la même manière de la longueur d'onde et de l'intensité de la lumière que les actions ci-dessus décrites de la lumière

[1]) *Proc.-verb. K. Akad. v. Wet.*, 28 mai 1881. — Pflugers *Archiv*, XXV, 1881, p. 285. — *Bot. Zeit.*, n°. 28.

sur les mouvements des Paramécies [1]). En effet, l'énergie de ce dégagement mesurait en moyenne (en centièmes de la valeur maxima, entre B et C), dans le microspectre de la

			lumière solaire:	lumière du gaz:
dans le rouge extrême	(*a*)	. . .	9.7	24.7
,, ,, jaune	(*D*)	. . .	35.2	23.3
,, ,, vert	(*E* ½ *b*)	. . .	14.6	6.2
,, ,, bleu	(*F*)	. . .	25.5	5.3
,, ,, violet	(*G*)	. . .	8.2	0.8.

Tout comme la disette d'oxygène, un *notable accroissement* de la tension de ce gaz rend les Paramécies très inquiètes. Elles ont alors une tendance particulière à nager à reculons ou, en général, à fuir les lieux de haute tension de l'oxygène. Or, le même effet est obtenu lorsque, la tension de l'oxygène étant déjà passablement mais non suffisamment élevée au-dessus du taux normal, par exemple dans la chambre à gaz remplie d'O pur à la pression ordinaire, on éclaire tout à coup *fortement* les animalcules. Au lieu de se ralentir, les mouvements, jusque-là encore assez normaux, deviennent alors subitement des plus tumultueux. Parfois les Paramécies s'élancent brusquement, avec la rapidité de la flèche, à une grande distance en arrière, pour ne se calmer peu à peu que lorsqu'elles sont entrées dans l'obscurité. Un nouvel éclairement excite une nouvelle agitation, etc. *Bien loin d'éviter l'obscurité, elles fuient maintenant la lumière.* Photophiles en cas d'insuffisance d'O, elles sont donc photophobes en présence d'un excès d'oxygène. En accord aussi avec l'explication donnée, elles craignent alors le plus la lumière rouge, et les autres longueurs d'onde d'autant moins que l'action assimilatrice en est plus faible.

Tout montre que les Paramécies possèdent, à un degré très développé, le pouvoir de distinguer des différences dans la tension de l'oxygène, et que c'est par l'intermédiaire de cette faculté de discernement que la lumiére influence les mouvements.

---

[1]) *Lichtabsorptie en assimilatie* etc., *l. c.*, p. 10.

III. Type: Euglena viridis.

Tout autre, de nouveau, est le mécanisme physiologique par lequel *Euglena viridis*, de même que *Colacium*, *Trachelomonas* et autres formes voisines, réagissent à la lumière. Cela résulte déjà de la circonstance que la réaction est, à un haut degré, *indépendante de la tension de l'oxygène.* Que l'oxygène fasse défaut, qu'il ait la tension normale, ou qu'il soit absolument pur, toujours les Euglènes se montrent extrêmement sensibles à la lumière.

Dans l'obscurité, en l'absence complète d'O, elles périssent naturellement peu à peu, et les réactions à la lumière deviennent donc aussi de plus en plus faibles et irrégulières. Néanmoins, celles-ci se produisent encore à un moment où les mouvements normaux sont déjà devenus très fébriles, chancelants. Quand l'oxygène a une tension *très* forte, la sensibilité à la lumière paraît aussi être un peu moindre que dans les conditions habituelles. Entre ces extrêmes, la tension de l'oxygène n'exerce, ni quantitativement ni qualitativement, une influence bien appréciable. Le maximum de sensibilité paraît toutefois correspondre, en général, à une tension de l'oxygène un peu supérieure à la tension normale.

Les phénomènes sont ordinairement les suivants. Quand on éclaire une partie de la goutte, le reste demeurant tout à fait obscur, les Euglènes s'accumulent peu à peu à l'endroit éclairé. Celui-ci agit comme un piège, car une fois qu'elles y ont pénétré, les Euglènes n'en sortent généralement plus. A la limite de l'obscurité, elles rebroussent toujours vers la lumière. Si, ce qui arrive parfois, la rapidité de leur progression les a emportées dans l'obscurité complète, elles y interrompent bientôt leur mouvement progressif, tournent autour de leur axe court, et essaient — souvent avec de notables changements de forme — d'avancer dans différentes directions, jusqu'à ce qu'enfin elles aient retrouvé la lumière. Rarement elles se fourvoient plus loin dans l'obscurité.

Si le fait, que la sensibilité à la lumière est relativement indépendante de la tension de l'oxygène, indique déjà que les réactions décrites ne sont pas dues à des modifications de la production d'O dans la chlorophylle des Euglènes, une autre voie, plus directe, conduit à la même conclusion.

On sait que le corps des Euglènes, qui dans la natation a ordinairement la forme d'un fuseau allongé, ne contient pas de chlorophylle à son extrémité antérieure, incolore. C'est là qu'est inséré le long flagellum et que se trouve la tache pigmentaire rouge, bien connue. Or, si l'on meut le miroir ou le porte-objet de manière à ce qu'une ombre bien tranchée glisse *d'arrière en avant* sur le corps d'une Euglène nageant droit devant elle dans la lumière, l'animal ne réagit pas, *tant que la partie antérieure*, *dépourvue de chlorophylle*, *n'est pas plongée dans l'obscurité.* A ce moment, l'Euglène s'arrête brusquement, rebrousse chemin, se raccourcit d'ordinaire, bref, se comporte comme lorsqu'elle est amenée tout à coup, dans son entier, de la lumière dans les ténèbres. Quant au flagellum, que l'obscurcissement l'atteigne aussi, ou l'épargne, cela est parfaitement indifférent. Une action directe de la lumière sur le flagellum, supposée par M. Hofmeister, n'existe donc pas.

Lorsqu'on observe attentivement ce qui se passe quand une Euglène, l'extrémité orale en avant, est sur le point de franchir la limite entre la lumière et l'ombre, dans la direction de cette dernière, on constate que la réaction se produit ordinairement à l'instant, ou peu après l'instant, où la tache pigmentaire de l'extrémité antérieure est entrée dans l'obscurité. Quelquefois, la réaction s'accomplit alors si vivement, que la partie chlorophyllifère du corps n'arrive même pas à toucher le bord du champ obscur.

La perception de la lumière, *chez l'Euglène*, *siège donc exclusivement à l'extrémité antérieure*, *dépourvue de chlorophylle.* Ma première idée, toutefois, que la tache pigmentaire indiquerait plus spécialement la place où la perception lumineuse s'accomplit, ne s'est pas confirmée. Chez des Euglènes très

grandes, qui nageaient lentement, j'ai récemment constaté, à différentes reprises, que la réaction se produisait même *avant que la tache pigmentaire n'immergeât dans l'obscurité*. C'est donc *le protoplasme incolore et transparent*, *au pôle antérieur du corps*, qui *éprouve l'excitation primaire et directe de la lumière*. Néanmoins, il serait prématuré, à ce qu'il me semble, de vouloir refuser à la tache pigmentaire toute signification pour la perception de la lumière. Il est possible, en effet, que — de même que l'épithélium pigmentaire de la rétine chez les animaux supérieurs — elle joue un rôle indirect, par exemple, en concourant à la formation de matières sensibles à la lumière. La morphologie comparée de l'organe visuel des animaux les plus inférieurs prête un certain appui à cette présomption. On peut donc, sans inconvénient, continuer provisoirement à l'appeler „tache oculaire”.

Il sera difficile de décider si la relation, qui vient d'être indiquée, existe chez toutes les formes possédant une tache dite oculaire. L'exiguïté du corps, la trop grande rapidité des mouvements, la situation défavorable de la tache pigmentaire constituent souvent des obstacles insurmontables. On peut présumer du reste, presque avec certitude, que, chez tous ces organismes les plus inférieurs, le pouvoir perceptif est développé particulièrement au pôle oral. C'est là, en effet, pour des raisons bien évidentes, le cas général chez les animaux. Chez le *Paramecium bursaria* aussi, remarquons-le encore en passant, la moitié antérieure du corps, jusqu'aux alentours de l'orifice buccal, qui est situé assez loin en arrière, est plus sensible aux variations de la tension de l'oxygène que la moitié postérieure. Celle-ci, quoique plus riche en chlorophylle, doit être ombragée pendant assez longtemps avant qu'une réaction ne s'ensuive, tandis que, pour la première, un instant est parfois suffisant. Une action directe de la lumière sur le protoplasme incolore, sans intervention des grains de chlorophylle, ne paraît toutefois pas se produire ici. Du moins, je n'ai jamais obtenu d'effet décisif en n'éclairant, ou ne mettant dans l'ombre, sur une

largeur d'environ 0,01 mm., que le bord tout à fait antérieur du corps, où il n'y a pas de chlorophylle, mais seulement des trichocystes. Par contre, dès qu'il y avait aussi quelques grains chlorophylliens de frappés, le mouvement caractéristique se manifestait.

La grande différence des processus, chez *Paramecium* et *Euglena*, ápparaît encore clairement quand on examine comment l'un et l'autre de ces organismes se comportent vis-à-vis des rayons de différentes longueurs d'onde.

Dans le microspectre de la lumière du jour ou de la lumière du gaz, les Euglènes, il est vrai, ne s'accumulent aussi que dans la partie visible; mais, au lieu de rechercher le rouge, elles ont une tendance, même en cas de faible intensité lumineuse et de faible pureté du spectre, à se rassembler au côté le plus réfrangible. A mesure qu'on rétrécit la fente, elles se concentrent de plus en plus dans le bleu, et finalement, quand le spectre a acquis une intensité déterminée, relativement faible, et une assez grande pureté, elles se réunissent toutes sur une zone étroite, correspondant à peu près à la raie *F*, entre les longueurs d'onde 0.47 et 0.49 μ. Là, elles continuent à se mouvoir de la manière normale, mais en rebroussant chaque fois chemin à la limite de l'obscurité et du vert, la plupart aussi à la limite du violet.

Lorsque le spectre est partagé, à l'aide de raies tracées dans l'oculaire, en bandes d'égale largeur, on trouve sur chacune de ces bandes, dans les conditions indiquées, un nombre différent d'Euglènes. C'est ainsi que, dans l'une des nombreuses expériences faites à des jours différents, avec des résultats semblables, j'ai compté:

dans la bande	1	(s'étendant de	A	à	$C\frac{3}{4}D$:	2 individus.
» »	2	»	„ $C\frac{3}{4}D$	„	$D\frac{5}{6}E$:	0 „
„ „	3	„	„ $D\frac{5}{6}E$	„	$b\ \frac{5}{6}F$:	16 „
„ „	4	„	„ $b\ \frac{5}{6}F$	„	$F\frac{4}{7}G$:	100 „
„ „	5	„	„ $F\frac{4}{7}G$	„	G :	24 „
„ „	6	„	„ G	„	$G\frac{1}{2}H$:	3 „

Les 16 individus de la bande 3 se trouvaient tous du côté

de la bande 4 (entre les longueurs d'onde 0.49 et 0.50 μ), et il en était de même de la plupart des individus de la bande 5 (entre les longueurs d'onde 0.47 et 0.46 μ). La source lumineuse [1]) était une forte flamme de gaz (brûleur de Sugg). Le microspectre était formé par l'objectif A de Zeiss et observé par l'objectif B. La largeur de la fente mesurait 0.42 mm.

La fente pouvait encore être rétrécie beaucoup plus, sans que le tableau changeât notablement. A un certain point, toutefois, les Euglènes commençaient, de même qu'en cas de suppression totale de la lumière, à se disperser dans tous les sens.

Leur sensìbilité relative aux différences de longueur d'onde, et aux différences d'intensité de chaque longueur d'onde en particulier, peut, on le comprend aisément, être mesurée à l'aide de l'objectif microspectral.

A cet égard, je me bornerai à remarquer encore que la plus petite différence d'intensité, perceptible par l'Euglène, est beaucoup plus grande pour le rouge, le jaune et le vert que pour le bleu (surtout de 0.47 — 0.49 μ), et aussi que pour le violet.

Je n'ai pu trouver jusqu'ici, d'une façon certaine, des Euglènes achromatopsiques ou tout à fait aveugles. Les individus provenant de localités différentes, ou pris dans la même localité à des époques différentes (à un intervalle de quelques semaines, par exemple), peuvent toutefois présenter, sous le rapport de la sensibilité, des différences quantitatives très notables.

Il sera intéressant de rechercher comment se comportent dans le microspectre les Euglènes traitées par la santonine. Une foule d'autres questions, importantes pour la physiologie comparée de la vision, pourront être assez facilement résolues par cette méthode.

---

[1]) Voir, sur la composition de cette lumière et sur son rapport avec la lumière solaire, les indications quantitatives contenues dans: *Lichtabsorptie en assimilatie* etc., *l. c.*, p. 9 et surtout une communication „*Over de zamenstelling van zonlicht*, *gaslicht en het licht van* Edisons *lamp*, *vergelijkend onderzocht met behulp der bacteriënmethode*, in *Proc. verb. K. Akad. v. Wetensch.* Amsterdam, 25 Nov. 1882.

Je suis loin de croire que les trois types d'organismes à perceptions lumineuses, qui viennent d'être décrits, représentent déjà toutes les variétés d'action photocinétique dont il y ait lieu de tenir ici compte. Sans aucun doute, outre les processus dont il a été question, il y en a encore d'autres — abstraction faite de tout effet thermique — par l'intermédiaire desquels la lumière peut excercer de l'influence sur les mouvements de beaucoup d'organismes simples. C'est ce qu'indiquent, entre autres, plusieurs des faits rassemblés par M. Strasburger dans sa brochure bien connue [1]), de même que les remarquables réactions du *Bacterium photometricum* récemment découvert par moi [2]) et sur lesquelles j'ai donné, dans un autre mémoire [3]), des détails circonstanciés. La présente communication avait seulement pour objet d'offrir à l'étude quelques fils conducteurs, qui promettent d'être d'une certaine utilité pour les recherches ultérieures dans ce domaine si vaste et encore si obscur.

---

1) E. Strasburger, *Wirkung des Lichtes und der Wärme auf Schwärmsporen*, Jena, 1878.

2) *Over een nieuw voor licht gevoelig Bacterium*, dans: *Proc.-verb. K. Akad. van Wetensch. te Amsterdam*, *Afd. Natuurk.*, Séance du 25 mars 1882.

3) Bacterium photometricum. *Ein Beitrag zur vergleichenden Physiologie des Licht- und Farbensinns*, in Pflügers *Archiv für die ges. Physiologie*, Bd. XXX, 1882, p. 95—124, Pl. I. — *Onderzoek. physiol. lab.* Utrecht (3), VII, 1882.

SUR LE

COLLENCHYME,

PAR

E. GILTAY.

Le 1er mai 1879, la Faculté des sciences de l'université d'Utrecht avait mis au concours la question suivante:

„Donner une description du collenchyme, à savoir, des formes sous lesquelles il se présente, des places qu'il occupe dans différentes plantes et dans différents organes, et surtout de la manière dont il se développe.

„Cette description devra s'appuyer sur des recherches originales; elle sera accompagnée de figures et, autant que possible, de préparations".

Le Mémoire que j'adressai à la Faculté, sur cette question, fut jugé digne du prix.

Comme je ne voulais pas le mettre au jour avant de l'avoir soumis à une révision approfondie, et comme les fonctions d'assistant de botanique à l'université de Leyde, ainsi que l'achèvement de mes études universitaires ne me laissaient guère de loisirs, il se passa deux années avant que je pusse m'occuper de la publication de mon travail. Une simple communication préliminaire, sur quelques-uns des résultats obtenus, fut insérée dans la *Botanische Zeitung* du 11 mars 1881.

Il y a quelques mois seulement, j'ai repris le travail en question, pour en faire le sujet de ma thèse inaugurale.

Renvoyant pour tous les détails à cette thèse, éditée chez E. J. Brill, à Leyde, j'en résumerai ici brièvement quelques points principaux.

M. de Bary, dans sa *Vergleichende Anatomie*, remarque avec raison que l'extension à donner au terme *collenchyme* est affaire

de goût. Le collenchyme, en effet, n'est pas un tissu nettement défini, mais un tissu intermédiaire entre le parenchyme et le sclérenchyme et réalisant toutes les formes de passage de l'un à l'autre. Il y a seulement une forme déterminée qui, en outre des épaississements caractéristiques aux angles des cellules, possède un aspect prosenchymateux très prononcé, et qui mérite le nom de collenchyme typique.

Un critère d'un usage très général pour décider si l'on a affaire à du collenchyme ou à du parenchyme ordinaire, c'est l'éclat particulier que montre le premier de ces tissus, vu sur une coupe transversale.

Cet éclat, toutefois, ne doit pas être regardé, d'une manière trop absolue, comme une propriété spécifique du collenchyme. Le degré relatif des épaississements joue, par exemple, un rôle important dans le phénomène. Avec des cellules de parenchyme peu épaissies, avec des éléments de phloème à parois minces, on peut en effet, pourvu qu'on se serve d'un grossissement assez fort, obtenir souvent une image microscopique entièrement analogue à celle que fournit la paroi collenchymateuse.

Etudions cet éclat d'un peu plus près.

En examinant une même préparation de collenchyme par des systèmes optiques différents et avec un même appareil d'éclairage, on reconnaît bientôt que l'intensité lumineuse des parois collenchymateuses n'est pas toujours dans le même rapport avec celle du champ visuel libre.

Qu'on emploie, par exemple, le corps VII^b de Zeiss avec le miroir qui y est adapté, et qu'on regarde une préparation, à la lumière du jour, par l'objectif B B. Lorsque le miroir se trouve aussi bas que possible, les parois du collenchyme, sous un éclairage central, ont une plus forte intensité lumineuse que les parties du champ libre [1]). Si l'on fait monter le miroir aussi haut que possible, l'éclat diminue notablement. Prenons maintenant l'objectif A A et ramenons le miroir à sa position infé-

---

[1]) J'appelle „champ libre" la partie du champ dans laquelle se croisent des rayons dont la marche n'est pas influencée par la préparation.

rieure; l'éclat est alors presque éteint, et les membranes cellulaires ne se distinguent plus que grâce aux ombres foncées qui les séparent, à leurs limites, de la cavité des cellules. Partout ailleurs, la paroi a la même teinte et la même intensité lumineuse que le champ visuel libre.

Avec des microscopes ordinaires, à systèmes optiques faibles, les parois sont généralement vues sans éclat; celui-ci n'apparaît que lorsqu'on emploie des systèmes plus forts. Cet éclat n'est alors pas dû, toutefois, à la distance focale moindre et par conséquent au grossissement plus fort du système employé, mais à la plus grande ouverture, plus particulièrement à ce que l'ouverture angulaire du système est plus grande que le maximum de l'angle sous lequel se croisent, dans le champ visuel, les rayons venus du miroir.

Si l'on cherche quelles sont les conditions qui peuvent produire l'éclat d'une partie de paroi vue en coupe transversale, on trouve que lorsque le microscope est mis au point, comme c'est le cas habituel, sur la face *supérieure* de la préparation, aucun des points de celle-ci ne peut acquérir une intensité beaucoup plus grande que celle du champ libre, si l'indice de réfraction de la paroi est moindre que celui du milieu ambiant.

Il en est autrement lorsque l'indice de la paroi est plus grand que celui du milieu ambiant; dans ce cas, si l'on a mis au point sur la face supérieure, il est possible que non seulement les rayons qui tombent sur la face inférieure de la paroi, mais aussi tous ceux qui l'abordent par les faces latérales, émergent par la face supérieure. La condition nécessaire pour que cela arrive est exprimée par l'inégalité

$$90° - arc\ sin\ \frac{n\ sin\ \alpha}{n'} > arc\ sin\ \frac{n}{n'} > 90° - arc\ sin\ \frac{n\ cos\ \alpha}{n'},$$

où n et n' désignent les indices de réfraction du milieu ambiant et de la substance pariétale, α l'angle maximum sous lequel les rayons lumineux tombent sur la paroi.

Un examen spécial de la marche suivie dans ce cas par les

rayons montre que le surcroît de lumière des points de la face supérieure est due à ce qu'il émane de ces points des cônes lumineux plus grands que ceux qui partent des points du champ visuel dans lesquels se croisent des rayons dont la marche n'est pas influencée par la préparation (champ visuel libre) [1]). Comme on trouve, en outre, que des rayons tombés sur deux points différents de la paroi ne peuvent jamais sortir, dans *la même direction*, par un point unique, il en résulte qu'une semblable paroi collenchymateuse ne peut offrir un vif éclat que lorsque l'ouverture angulaire efficace de l'objectif employé est plus grande que l'angle sous lequel le miroir est vu du plan sur lequel on a ajusté; c'est ce qu'il est facile de vérifier expérimentalement.

Des détails qui précèdent, je crois pouvoir conclure que l'éclat des parois collenchymateuses provient de ce qu'il sort par leur face supérieure, venant grossir les faisceaux normaux qui en émanent, assez de rayons pour que la perte d'intensité, que ces faisceaux ont subie dans leur passage à travers la paroi, soit plus que compensée.

Les rayons surnuméraires, que le collenchyme émet lorsqu'on a mis au point sur sa face supérieure, étant soustraits aux parties contiguës du champ, la paroi est entourée d'une zone plus obscure de ce champ, laquelle passe insensiblement au champ visuel libre, qui émet des faisceaux normaux. Par le contraste de la paroi collenchymateuse fortement éclairée et de la bordure obscurcie qui l'entoure, l'éclat est, en apparence, encore augmenté.

Tout ce qui vient d'être dit suppose que l'on mette au point, comme cela a lieu ordinairement, sur la face supérieure de la préparation. Si, au contraire, on ajuste sur la face inférieure, et que la paroi soit plus réfringente que le milieu ambiant, l'effet optique doit être inverse, ainsi que le montre bientôt l'examen spécial de ce cas. Une partie des rayons dirigés vers

1) Dans mon Mémoire, les cônes lumineux qui émanent du champ libre ont été appelés „faisceaux normaux"; les rayons qui en quelque point, par exemple à la face supérieure de la paroi collenchymateuse, renforcent les faisceaux normaux, „rayons surnuméraires".

la face inférieure sont alors déviés de telle sorte qu'ils semblent venir de points situés à côté de la paroi. Il n'y aura donc que la partie centrale de celle-ci qui possédera une intensité lumineux égale à celle du champ libre; vers les bords, cette intensité diminuera peu à peu.

Une pareille image peut effectivement être toujours obtenue avec une bonne coupe de collenchyme, immergée dans la glycérine. Je crois qu'il n'est pas du tout superflu de fixer l'attention sur cette diversité d'aspect que le collenchyme présente au microscope suivant qu'on met au point sur la face supérieure ou sur la face inférieure. Généralement, en effet, on considère l'aspect lumineux du collenchyme comme une propriété spécifique de ce tissu, tandis que cet éclat n'apparaît que dans des conditions déterminées, dont l'une, la mise au point sur la face supérieure et non sur la face inférieure, est au fond entièrement arbitraire.

On sait que M. Dippel (*Die neuere Theorie über die Structur der Zellhülle betrachtet an der Hand der Thatsachen*, Frankfurt, 1878) a combattu l'opinion régnante au sujet des phénomènes que présentent l'accroissement et la structure de la paroi cellulaire. En ce qui concerne la lamelle moyenne, il ne pense pas qu'elle soit d'abord homogène et ne se différencie que plus tard, mais il la regarde comme composée des parois primaires de deux cellules contiguës, avec une petite couche, commune aux deux cellules, de matière intercellulaire (la „*mittlere Theilplatte*"). Dans la lumière polarisée, avec les nicols en croix, cette composition se reconnaîtrait à ce que les deux lamelles primaires sont brillantes, tandis que la matière intercellulaire ne l'est pas. Contrairement à l'assertion de M. Sachs, l'auteur dit qu'après le traitement par l'acide sulfurique ce n'est pas la lamelle moyenne entière qui persiste, mais seulement la couche centrale, tandis que, sous l'influence des agents de macération, cette couche centrale est toujours la seule qui se dissolve. — L'opinion de M. Dippel a trouvé récemment un appui solide chez M. Strasburger.

La cellule collenchymateuse n'est certainement pas au nombre des éléments qui conviennent le mieux pour l'étude des phénomènes de l'accroissement de la membrane cellulaire. Néanmoins, elle m'a permis de faire quelques observations qui, sous le rapport en question, ne me semblent pas dépourvues de tout intérêt.

La nature complexe de la lamelle moyenne ressort aussi, à ce que je crois, de l'étude du collenchyme. En effet, quand on traite celui-ci par l'acide chromique, les cellules se séparent l'une de l'autre, comme l'on sait; mais du côté extérieur elles sont toujours limitées, ainsi que M. Dippel l'a observé pour d'autres éléments, par une lamelle claire et brillante (Pl. VIII, fig. 8, 9; Pl. IX, fig. 3), probablement le reste de la lamelle moyenne.

Souvent, dans une écorce collenchymateuse, une couche déterminée est adaptée à l'assimilation et contient de la chlorophylle. Bien que la couche chlorophyllifère se rapproche alors toujours de la forme parenchymateuse (voir plus loin), la nature collenchymateuse s'y laisse fréquemment encore reconnaître. Une condition essentielle pour que le tissu puisse remplir la fonction assimilatrice, c'est l'existence d'espaces intercellulaires; aussi, dans les cas en question, trouve-t-on parfois la lamelle moyenne de cellules contiguës entièrement fendue sur la largeur de une ou plusieurs cellules. Or, j'ai encore observé que la cavité intercellulaire était alors toujours limitée par une couche douée d'un éclat prononcé (Pl. VIII, fig. 7), de sorte que vraisemblablement la matière intercellulaire avait été résorbée, ne laissant subsister que les lamelles primaires.

Quand on examine, sans macération préalable, des cellules corticales telles que celles de la fig. 6, Pl. VIII, qui se rencontrent fréquemment dans la nature, on peut difficilement s'empêcher de croire que dans la cellule à droite, aux deux angles situés au côté droit, la matière intercellulaire existe encore dans la lamelle moyenne, tandis que dans les cellules situées à gauche cette matière a été résorbée, de sorte que la

lamelle moyenne n'est plus constituée que par les membranes primaires.

Il arrive très souvent, dans les cellules fortement allongées, qu'à un certain stade de leur développement elles se divisent par des cloisons tranverses. Le collenchyme aussi présente ce phénomène de cloisonnement, d'une manière très nette, par exemple , chez le *Hedera Helix.* Les parois de formation postérieure se reconnaissent généralement à leur moindre épaisseur, et aussi à ce qu'elles sont placées horizontalement, et non obliquement, comme c'est le cas pour les parois transverses plus âgées des longs entre-nœuds.

Quand le tissu est traité par l'acide chromique, on observe très distinctement, dans des stades déterminés de la macération, que les parois transverses ne s'appliquent pas simplement contre les parois longitudinales (sauf peut-être leur partie centrale, la *mittlere Theilplatte* de M. Dippel), mais qu'elles résultent essentiellement de l'accolement des parois des cellules nouvelles qui se sont formées dans la cellule collenchymateuse primitive; c'est ce que montre suffisamment le dessin schématique de la fig. 11, Pl. VIII.

Evidemment, les cellules de formation nouvelle sont ici enveloppées par les parois des cellules anciennes; on a affaire à un emboîtement, tel qu'il apparaît parfois si nettement, surtout chez les Algues.

J'ai observé ce phénomène non seulement sur le collenchyme, mais dans différents autres cas, et je le regarde comme très général, bien que, par la nature même des choses, il ne soit pas toujours également frappant.

En ce qui concerne le mode de formation de ces générations cellulaires emboîtées les unes dans les autres, j'estime probable tout en n'émettant provisoirement cette opinion qu'avec réserve, que lorsque la cellule se divise au moyen du noyau, de la manière ordinaire, il est sécrété une jeune paroi homogène, qui se dépose simplement contre les parois longitudinales, qu'elle unit transversalement. Le noyau une fois segmenté en deux nouveaux noyaux,

les deux moitiés du protoplasma peuvent déposer tout autour, contre les membranes qui les enveloppent, de nouvelles générations pariétales.

Dans les Traités de botanique, le collenchyme est généralement considéré comme un tissu riche en eau et susceptible de se gonfler fortement.

M. Ambronn, à qui nous devons un important travail sur le collenchyme [1]), n'a pu observer aucune contraction sur des coupes transversales soumises à l'action d'agents de déshydratation, tels que l'alcool ou la glycérine. Il a donc introduit dans ces liquides des faisceaux entiers de collenchyme. N'ayant alors obtenu, dans le sens de la longueur, qu'un raccourcissement très faible, il en conclut qu'il est très naturel que sur une coupe transversale il ne se produise pas de contraction du tout, et de l'un et l'autre résultat il déduit, contrairement à l'opinion commune, que les cellules collenchymateuses ne se gonflent pas fortement dans l'eau.

Ces conclusions ne me paraissent pas pouvoir être admises sans réserve.

En premier lieu, la faiblesse du raccourcissement que des éléments déterminés éprouvent sous l'influence des agents de déshydratation ne peut être invoquée comme explication du fait que, sur des coupes transversales, on ne constate pas le moindre indice de contraction.

Il ne manque pas, en effet, d'observations indiquant l'existence, chez les parois cellulaires, d'une faculté de gonflement différente dans des directions différentes [2]). Le collenchyme aussi

[1]) H. Ambronn, *Ueber die Entwickelungsgeschichte und die mechanischen Eigenschaften des Collenchyms*, dans: Pringsheim *Jahrb.*, t. XII, 1881, p. 511.

[2]) Voir, par exemple, les données qu'on trouve à ce sujet dans Nägeli und Schwendener, *Das Mikroskop*, 2e éd., p. 430; ensuite: Strassburger, *Bau und Wachsthum der Zellhäute*, p. 107; Albrecht Zimmermann, *Ueber mechanische Einrichtungen zur Verbreitung der Samen und Früchte, mit besonderer Berucksichtigung der Torsionserscheinungen*, dans Pringsheim's *Jahrb.*, t. XII, 1881, p. 542.

pourrait donc se gonfler dans le sens longitudinal tout autrement que dans le sens radial.

Une autre objection que soulève l'argumentation de M. Ambronn, c'est que, du défaut de raccourcissement dans les agents de déshydratation, on ne peut conclure d'emblée à la faiblesse du gonflement dans l'eau. Il serait possible, en effet, que la paroi cellulaire eût pour l'eau une affinité si grande, que les substances hygroscopiques employées fussent incapables de la déshydrater d'une manière appréciable; le cas *pourrait* même se présenter que la paroi collenchymateuse enlevât encore de l'eau à ces matières hygroscopiques.

Mes mesures n'ont été entièrement d'accord ni avec l'opinion ancienne, ni avec celle de M. Ambronn. Assurément, le collenchyme ne possède pas une faculté de gonflement aussi grande que celle observée par Link chez les cellules-mères du pollen, une faculté de gonflement telle qu'on l'avait supposée en créant le terme „collenchyme"; mais, d'un autre côté, les résultats obtenus par M. Ambronn au sujet de l'eau contenue dans la paroi cellulaire ne sont pas d'une application générale.

J'ai exécuté des mesures sur différentes espèces de collenchyme qui, par l'épaississement considérable des parois, se prêtaient bien à cette opération. A cet effet, je commençais par dessiner au trait une partie déterminée d'une coupe transversale; puis l'épaisseur d'une dizaine de parois communes à deux cellules était mesurée au moyen d'un micromètre oculaire et inscrite sur la figure. Ensuite, la coupe était plongée dans l'un ou l'autre milieu déshydratant, les mêmes que ceux auxquels M. Ambronn avait eu recours; il faut mentionner seulement que j'ai employé deux sortes d'alcool, l'un faible, à 30 °/₀, l'autre concentré, à 95 °/₀. Lorsque la coupe avait séjourné quelque temps dans le milieu hygroscopique, l'épaisseur des dix mêmes parois était mesurée de nouveau; de la différence entre les sommes des deux dizaines de mesures on déduisait la contraction, en tant pour cent.

Chez le *Foeniculum vulgare* j'obtins avec l'alcool à 95 °/₀, en

deux cas, une contraction radiale de 11 et de 14 pour cent; chez la même plante, avec le chlorure de calcium et la glycérine, la contraction fut respectivement de 6 et de 4 pour cent. Chez le *Dipsacus ferox* je trouvai, avec l'alcool à 95 %, une contraction de 22 %, avec l'alcool à 30 %, une de 13 %; avec la glycérine et le chlorure de calcium, aucune contraction mesurable ne fut observée. L'*Achillea filipendula*, avec l'alcool à 95 %, avec l'alcool à 30 % et avec le chlorure de calcium, donna des contractions respectives de 32, 20 et 5 pour cent; la glycérine, par contre, ne détermina pas de resserrement appréciable. Le *Pyrethrum multiflorum* n'accusa nettement une contraction (15 %) qu'avec l'alcool à 95 %; avec d'autres agents hygroscopiques, la contraction était faible ou douteuse. Le collenchyme du *Rubia tinctorum*, pris sur de jeunes entre-nœuds, donna dans l'alcool à 95 % une contraction de 23 %; celui des entre-nœuds plus âgés ne se contracta que de 7, 9 et 8 pour cent.

Mes expériences confirment donc l'opinion de Schleiden, que le collenchyme est le plus riche en eau dans sa jeunesse, tandis que plus tard la proportion d'eau diminue. En employant des agents de déshydratation énergiques, j'ai toujours obtenu une contraction radiale très sensible et quelquefois assez forte (allant même jusqu'à 32 %). Comme l'emploi de liquides hygroscopiques moins forts donnait toujours lieu à une contraction notablement moindre, parfois même presque insensible, je crois pouvoir en conclure que, dans certains cas au moins, l'affinité de la paroi collenchymateuse pour l'eau n'est pas médiocre.

En même temps, toutefois, je suis d'avis qu'on ne saurait attribuer avec certitude au collenchyme une faculté de gonflement ou une teneur en eau beaucoup plus grandes, spécifiquement, que celles des cellules parenchymateuses à parois minces. Sous l'un et l'autre rapport, en effet, les différentes sortes de collenchyme présentent des différences assez grandes, et je ne regarde pas comme impossible que ces variations s'étendent entre les mêmes limites que chez le parenchyme à minces parois cellu-

laires. D'un autre côté, l'opinion contraire résulte peut-être en grande partie du fait que, chez les cellules à parois minces, les changements de volume ne sautent pas tant aux yeux que chez les éléments à parois épaisses, tout comme, dans ces derniers, l'éclat des parois frappe beaucoup plus que dans les premières.

J'ai fait agir sur le collenchyme des matières colorantes et des réactifs très variés: réactifs de la cellulose, solution ammoniaco-cuivrique, fuchsine, différents bleus d'aniline, brun d'aniline, différents violets d'aniline, acétate de rosaniline, hématoxyline, roccelline, rosolane. Aucune de ces substances n'a toutefois donné une réaction distinguant nettement le collenchyme des cellules parenchymateuses à parois minces, non lignifiées.

En ce qui concerne le contenu du collenchyme, je ne parlerai ici que de la chlorophylle.

Les cellules collenchymateuses typiques et la chlorophylle ne s'accommodent pas; aussi cette dernière ne se trouve-t-elle, en général, que dans les éléments parenchymateux environnants. Lorsque le collenchyme renferme, en tout ou en partie, de la chlorophylle, ces cellules chlorophyllifères ont ordinairement subi une adaptation spéciale.

La séparation est effectivement bien tranchée entre le collenchyme typique et les tissus à chlorophylle. C'est ce qu'on voit, par exemple, chez les *Lavatera arborea* (Pl. IX, fig. 1), *Panax fruticosum*, *Passiflora trifasciata*, *Habrothamnus elegans*, *Aralia Veitchii gracilis*.

Quand le collenchyme se charge de chlorophylle, il prend des formes particulières, caractéristiques.

Le premier changement qui se manifeste alors, c'est que les épaississements diminuent et que des cavités intercellulaires apparaissent. On en trouve un exemple frappant dans le pétiole du *Fittonia argyroneura* (Pl. IX, fig. 4). Immédiatement sous l'épiderme, il y a ici une forte couche de collenchyme à épais-

sissements typiques. Sur quelques points, on y voit un peu de chlorophylle, mais, au total, en quantité insignifiante. Par contre, la chlorophylle est d'autant plus abondante dans le parenchyme cortical qui succède au collenchyme. En certains endroits, et c'est là le fait que je veux surtout signaler, la chlorophylle pénètre jusqu'à l'épiderme; mais les cellules collenchymateuses qui la renferment sont notablement modifiées, leurs épaississements sont beaucoup moindres et, en outre, il existe entre elles des cavités intercellulaires. Dans quelques-uns de ces endroits j'ai trouvé les cellules peu ou point épaissies, dans d'autres la nature collenchymateuse était encore bien apparente, quoique la présence de la chlorophylle eût entraîné les modifications susdites.

Un exemple encore plus net m'a été offert par un *Ficus*. Au-dessous de l'épiderme se trouve de nouveau un assez fort anneau de collenchyme, coupé çà et là de couches corticales à chlorophylle. Or, entre les deux tissus, on observe toutes sortes de passages. Tantôt le collenchyme est entièrement interrompu; tantôt il ne l'est que jusqu'à une certaine distance de l'épiderme, tandis que, immédiatement au-dessous de cet épiderme, il existe encore du collenchyme typique; ailleurs (Pl. IX, fig. 5) la disposition est encore plus remarquable: en contact immédiat avec l'épiderme, on trouve un collenchyme peu épaissi, mais encore sans chlorophylle, puis, plus bas, au niveau de la moitié inférieure de l'anneau collenchymateux, des cellules parenchymateuses remplies de chlorophylle.

Depuis les célèbres recherches de M. Schwendener, on sait que le collenchyme fait partie, avec le sclérenchyme, des tissus mécaniques. De là vient qu'on le rencontre si fréquemment à la périphérie des organes cylindriques libres, auxquels il donne la solidité nécessaire pour résister aux efforts de flexion.

Mais si le collenchyme, dans ces cas, tend vers la périphérie, il ne parvient pas toujours à acquérir, dans les couches sous-épidermiques, une domination incontestée. Les cellules qui contiennent de la chlorophylle, et qui par conséquent sont chargées

de l'assimilation, cherchent également à se rapprocher autant que possible de la périphérie, afin de recevoir l'influence de la lumière.

Ces intérêts opposés donnent lieu à ce que M. Schwendener appelle la lutte entre les tissus mécaniques et les tissus assimilateurs, lutte qu'il a étudiée surtout, en détail, par rapport au sclérenchyme et à la chlorophylle.

Une conséquence de cette lutte est la diversité de distribution des cellules mécaniques et assimilatrices à la périphérie. Parfois ce sont les éléments mécaniques qui supplantent les autres, parfois le contraire arrive, le plus souvent les couches périphériques sont partagées plus ou moins également entre les uns et les autres.

Le collenchyme aussi est engagé, d'une manière non équivoque, dans cette lutte.

Chez le *Habrothamnus elegans*, par exemple, où le collenchyme est situé en dehors, il a repoussé le tissu à chlorophylle; chez l'*Althaea Hohenackerii*, où le collenchyme est situé en dedans, il a été refoulé par les cellules assimilatrices; chez le *Broussonetia papyrifera*, où le tissu à chlorophylle touche des deux côtés à du collenchyme, des concessions ont été faites de part et d'autre: tout à fait à l'extérieur se trouve du collenchyme, mais seulement en une petite couche mince, qui ne dérobe pas trop de lumière à la couche chlorophyllifère sous-jacente, et c'est seulement après cette dernière que vient la masse principale du collenchyme.

Si tels sont les modes principaux suivant lesquels les tissus mécaniques et assimilateurs se distribuent dans le sens radial, on ne trouve pas toujours; sur toute la périphérie, le même ordre de succession. Lorsque immédiatement sous l'épiderme il y a du collenchyme, l'anneau qu'il forme est interrompu, comme nous l'avons vu, en des points déterminés (Pl. X, fig. 3, 4), naturellement en des points où l'épiderme présente des stomates. Quand, au contraire, c'est le tissu assimilateur qui constitue la première couche sous-épidermique, il n'y a pas de raison pour

que le collenchyme, situé en dessous, ne se dispose pas de manière à donner à la plante le maximum de solidité, savoir, en anneau fermé (Pl. X, fig. 8). De même, lorsque le tissu à chlorophylle est compris entre deux couches de collenchyme, il arrive bien que la couche extérieure soit interrompue sous les stomates, mais la couche intérieure reste continue.

Nous voyons donc que le collenchyme, tout comme le sclérenchyme, entre en lutte avec les éléments assimilateurs. La comparaison des deux tissus donne toutefois lieu aux remarques suivantes.

Du collenchyme aux tissus assimilateurs, la distance est moindre que de ceux-ci au sclérenchyme; entre ces derniers, le collenchyme forme le passage. Aussi voit-on souvent les cellules faiblement collenchymateuses, non typiques, renfermer de la chorophylle, ce qui est au contraire rare dans le sclérenchyme. Ce rapprochement plus marqué de la cellule collenchymateuse vers la forme cellulaire spécialement apte à l'assimilation, imprime à la lutte en question, chez le collenchyme, un caractère qui diffère en partie de celui qu'elle présente chez le sclérenchyme.

Dans ce que nous continuerons d'appeler, pour rester fidèle à l'image de M. Schwendener, la lutte avec les tissus assimilateurs, le sclérenchyme est tantôt vainqueur et refoule ces derniers, tantôt il est vaincu et doit lui-même céder la place.

Chez le collenchyme nous trouvons également ces deux cas, mais, de plus, il y a une troisième issue, intermédiaire. Parfois le tissu fait, au moins sur quelques points, des concessions au profit de l'assimilation; les épaississements diminuent, les cavités intercellulaires deviennent plus larges et plus nombreuses. Par la facilité plus grande qui en résulte pour l'échange des gaz, le tissu est alors devenu plus propre au travail de l'assimilation; mais il a beaucoup perdu de sa valeur mécanique. Néanmoins, lorsque les épaississements n'ont pas entièrement disparu, cette perte est atténuée par la circonstance que le collenchyme a conservé sa position périphérique, si favorable pour la résistance

de l'organe à la rupture par flexion. Dans certains cas, toutefois, et sur quelques points, il dégénère complètement en tissu assimilateur.

La chlorophylle cherche donc à envahir les cellules collenchymateuses et à leur donner la nature qui lui est nécessaire pour remplir sa fonction. Le sclérenchyme, au contraire, garde toujours sa nature propre dans la lutte pour la prééminence avec le parenchyme assimilateur; celui-ci s'efforce de refouler le sclérenchyme, non de le rendre semblable à lui-même.

Parmi les particularités qu'offre le collenchyme sous le rapport mécanique, sa disposition dans les organes bilatéraux mérite, je crois, une mention spéciale [1]).

On sait que dans les tiges, qui mécaniquement doivent se comporter de la même manière dans toutes les directions, le stéréome est distribué régulièrement.

Il n'en est pas de même dans les organes bilatéraux, notamment dans les feuilles.

La position normale de la feuille est plus ou moins horizontale: la face inférieure est tournée vers la terre, la face supérieure vers le ciel. Tandis que la tige, dont la position normale est verticale, peut, sous l'action de sa propre pesanteur ou par l'effet de celle-ci et du vent, fléchir et se rompre dans un sens quelconque, chez la feuille, la tendance à la flexion, au moins sous l'influence de la pesanteur, agira dans une direction constante; or, la disposition mécanique, pour être rationnelle, devra tenir compte, en premier lieu, de cette circonstance. Le vent agira peut-être quelquefois dans le sens opposé, mais, tant que les feuilles n'ont pas une surface trop grande et qu'elles sont portées par des pétioles flexibles, l'action du vent consistera principalement en une extension, une partie du pétiole et surtout le limbe de la feuille se plaçant avec leur axe dans la

---

[1]) Voir E. Giltay, *Einiges über das Collenchym*, dans *Bot. Zeitg.*, 11 mars 1881.

direction du vent, à peu près comme une girouette qui tourne sur sa tige. Aussi, dans la feuille, spécialement dans la nervure médiane, la distribution des matériaux mécaniques, surtout du collenchyme, est-elle adaptée, en première ligne, à la direction constante suivant laquelle agit la pesanteur.

La force de résistance d'un barrot horizontal en forme de I croît avec la distance des ailes supérieure et inférieure, c'est-à-dire, avec la hauteur de l'âme; aussi la nervure médiane, qui donne à la feuille le pouvoir de résister à la flexion, fait-elle presque toujours saillie à sa surface; il en résulte que les bandelettes de collenchyme, situées à la périphérie, sont souvent à une distance l'une de l'autre qui surpasse plusieurs fois l'épaisseur du limbe foliaire.

La face supérieure de la feuille et le bord supérieur de la nervure médiane, d'une part, la face inférieure de la feuille et le bord inférieur de la nervure médiane, d'autre part, se trouvent assez constamment dans les mêmes conditions mécaniques; les deux premiers sont étendus, les deux derniers comprimés.

De même que des fils équipollents, sur lesquels une charge est distribuée également, possèdent toujours la même force de résistance, quelle que soit leur situation mutuelle, il est indifférent aussi comment les cellules collenchymateuses sont distribuées dans le bord supérieur de la nervure, car la valeur de ce bord dépend seulement de la valeur spécifique des stéréides qu'il renferme, de leur nombre et de leur distance à la „couche neutre”.

Dans la nature, j'ai rencontré, en ce qui concerne la disposition de la nervure médiane à la face supérieure de la feuille, deux cas principaux; le plus souvent elle s'élève un peu au-dessus de la surface, quelquefois elle reste au même niveau qu'elle. Dans le premier cas, la côte formée par la partie de la nervure médiane qui dépasse le niveau de la face supérieure est remplie, entièrement ou en majeure partie, de collenchyme (Pl. XI, fig. 4). Si la côte n'en est pas remplie entièrement, le collenchyme

est autant que possible accumulé au bord supérieur de la côte, en une baguette solide (Pl. XI; fig. 5, 6). C'est aussi de cette façon qu'il peut exercer le plus d'effet; car, s'il n'était pas condensé en baguette solide, une partie du collenchyme ne se trouverait pas à la plus grande distance possible de la couche neutre et, par conséquent, ne posséderait pas son maximum d'efficacité. Lorsque la nervure moyenne ne fait pas saillie au-dessus de la surface de la feuille, le collenchyme s'éloigne encore autant qui possible de la face inférieure de la nervure et s'applique contre l'épiderme, sous la forme d'une bandelette plate (Pl. XI, fig. 3).

Le côté de dessous de la nervure, le bord inférieur du portant, est plus spécialement construit pour résister à la compression et à la rupture. C'est surtout à la face inférieure de la feuille que la nervure moyenne fait saillie; ici encore, les cellules collenchymateuses se trouvent surtout à l'opposite du bord supérieur, donc dans la partie la plus proéminente du soutien; néanmoins, il y en a aussi aux deux faces latérales de la nervure (Pl. XI, fig. 3, 4, 5, 6). Cette disposition du collenchyme, en voûte prononcée, est de la plus haute importance, car c'est précisément par là que le bord inférieur a pris cette forme plus ou moins demi-cylindrique, qui est spécialement propre à résister à la rupture et à la flexion.

Les pétioles se comportent dans beaucoup de cas, ainsi que le dit M. Schwendener, comme des „*organes caulinaires réfractaires à la flexion*". Dans d'autres cas, toutefois, on y observe un rapprochement marqué vers la disposition que nous venons de constater chez la feuille.

D'abord, le pétiole présente très souvent une monosymétrie évidente; le côté supérieur, c'est-à-dire celui qui devient convexe quand le pétiole est courbé par son propre poids et par celui de la feuille, montre une tendance prononcée à l'aplatissement, tandis que le côté inférieur reste voûté (Pl. X, fig. 7). Chez quelques pétioles, le côté supérieur est tout à fait plan.

Mais, il y a plus. Fréquemment on trouve au côté supérieur

des bourrelets saillants, qui parfois sont petits, par exemple chez certaines Aroïdées, mais qui souvent aussi sont assez forts, comme chez les *Levisticum officinale* (Pl. XI, fig. 1), *Aralia Guilfoylii*, *Luffa Petola*, *Polemonium reptans* (Pl. XI, fig. 2) et *P. grandiflora*, *Pyrethrum multiflorum*, *Rubia peregrina.*

Dans ces cas, même si le collenchyme était distribué uniformément à la surface de l'organe monosymétrique, il y aurait déjà une certaine analogie avec ce que nous avons vu exister dans la nervure moyenne des feuilles; mais le rapprochement devient encore plus intime lorsque, comme il arrive parfois, le collenchyme est plus fortement développé aux côtés supérieur et inférieur qu'aux deux côtés latéraux; c'est ce que j'ai observé, par exemple, à un faible degré chez l'*Aralia Guilfoylii*, à un degré un peu plus prononcé chez le *Passiflora trifasciata*, et très nettement chez le *Hœmanolema rubescens*, chez un *Ficus* (Pl. X, fig. 7) et surtout chez le *Lavatera arborea* (Pl. X, fig. 8).

Cette distribution du stéréome dans les pétioles n'est pas difficile à expliquer. Le pétiole, en effet, se trouve encore plus ou moins dans les mêmes conditions que la feuille; lui aussi présente assez constamment une position plus ou moins horizontale. De là vient que le côté supérieur est de nouveau construit spécialement en vue de la résistance à la traction, ce qui n'exige pas une forme voûtée, et que des bourrelets surélèvent parfois certains faisceaux collenchymateux, dont l'importance mécanique se trouve ainsi accrue par leur distance plus grande au côté inférieur. De là aussi, que le côté inférieur, conformé de nouveau en vue de la résistance à la compression et à la rupture, possède souvent une forme voûtée, le stéréome étant distribué également sur la périphérie. De là, enfin, que dans certains cas le collenchyme est de nouveau accumulé surtout aux côtés supérieur et inférieur, qui, de même que dans la feuille, ont le plus grand effort à supporter.

M. Schwendener a le premier signalé le fait que, en général, le collenchyme a à exercer la fonction de tissu mécanique dans

d'autres circonstance que le sclérenchyme. Tandis que celui-ci est affecté aux organes déjà différenciés et qui ne s'allongent plus, le collenchyme, en raison de son aptitude à l'extension, joue le rôle principal pendant l'accroissement intercalaire. A cette même propriété il doit aussi d'être employé dans les articulations mobiles, point sur lequel je me contenterai de renvoyer aux faits mentionnés par M. Schwendener (*l. c.*, p. 95), par M. Rutzou [1]) et dans mon Mémoire.

Chez les plantes grimpantes, dans les entre-nœuds en voie d'enroulement et dans les vrilles qui ne se sont pas encore accrochées, le collenchyme est le seul représentant du stéréome; il y occupe de nouveau une situation périphérique, afin de donner à ces organes la résistance à la flexion, dont ils ont besoin dans leur jeunesse. Plus tard seulement, le sclérenchyme se différencie dans une position un peu plus centrale, surtout chez les vrilles, parce que celles-ci, pour l'exercice de leur fonction, consistant à soulever la plante et à la fixer par des liens élastiques aux objets voisins, doivent maintenant être capables surtout de résister à la traction.

Quelquefois, le collenchyme existe *bien* dans les vrilles et entre-nœuds vigoureux des espèces d'un même genre, *non* dans ceux qui sont plus faibles. Dans une vrille assez forte de *Smilax*, j'ai trouvé un épais anneau de collenchyme; chez le *Smilax officinalis*, beaucoup plus délicat, il n'y a plus qu'une écorce collenchymatoïde assez distincte. Chez le *Bignonia speciosa*, bien que ses vrilles soient assez minces, on trouve pourtant à leur base un collenchyme sous-épidermique d'environ deux rangées de cellules; chez le *Bignonia unguis*, qui porte des vrilles beaucoup plus faibles, et chez un autre analogue, dont le nom spécifique m'est inconnu, le collenchyme manquait complètement ou n'était que très peu développé. On ne le trouve pas non plus dans les petites vrilles très frêles du *Mutisia clematis;* dans une vrille

---

1) Sophus Rutzou, *Om Axeknuder; Saertryk af Botanisk Tidsskrift*, t. XII, 1881.

vigoureuse de *Passiflora spec.*, il était bien distinct, et dans les robustes vrilles de *Luffa Petola* il se montre très fortement développé.

Comme on pouvait s'y attendre, la base de la vrille est mieux pourvue de collenchyme que le sommet; à partir de celui-ci, le développement du collenchyme augmente peu à peu. Chez *Bignonia speciosa*, où l'on rencontre encore un peu de collenchyme à la base, il a entièrement disparu au sommet.

Parfois j'ai trouvé dans la vrille, et par conséquent aussi dans le stéréome (collenchyme), une monosymétrie analogue à celle que présentent les pétioles. Elle est très accusée surtout chez *Luffa Petola*, où le côté supérieur et convexe de la vrille est entièrement aplati, tandis que le côté inférieur et concave est voûté. En dedans de l'épiderme, au côté inférieur, se trouve un revêtement de collenchyme, qui est de nouveau le plus développé dans la partie la plus éloignée de la couche neutre; le côté plat supérieur est parenchymateux, mais aux deux angles il y a des faisceaux de collenchyme. Chez le *Passiflora spec.*, où la monosymétrie est peu ou point apparente sur la vrille même, le collenchyme est un peu plus fortement développé au côté convexe.

Chez les Monocotylédones, le collenchyme est rare. M. Falkenberg, qui a écrit une monographie sur la structure anatomique des Monocotylédones, ne connaissait dans cet embranchement que quatre cas de l'existence de ce tissu, savoir: le *Tradescantia argentea*, où son épaisseur compte deux assises de cellules, le *Dichorisandra*, où il est plus développé, le *Zea Mais*, où les cellules sous-épidermiques montrent quelquefois un faible épaississement collenchymateux, enfin le *Dioscorea villosa.* Ajoutons quelques autres cas cités par M. Schwendener, savoir les *Dioscorea sinuata*, *Tradescantia erecta* (et autres espèces), *Tamus communis*, puis encore, si l'on veut, les Aroïdées; il n'en restera pas moins vrai que le nombre total des Monocotylédones chez qui l'on a trouvé du collenchyme est tres faible comparativement à celui des Dicotylédones.

La circonstance que, sur ce petit nombre, deux sont des

plantes volubiles, avait attiré mon attention. Considérant que dans les entre-nœuds et les vrilles qui n'ont pas encore achevé leur enroulement il ne peut y avoir de stéréides lignifiés, qui entraveraient trop le mouvement et l'accroissement, je pensai que dans ces cas on trouverait peut-être, chez les Monocotylédones aussi, des épaississements collenchymateux.

Effectivement, j'en ai constaté la présence, à un degré plus ou moins prononcé, dans toutes les plantes monocotylédones volubiles que j'ai eu l'occasion d'étudier.

Chez l'*Asparagus scandens*, il y a un épiderme distinctement collenchymateux; chez le *Lapagerea rosea*, et surtout dans les vrilles du *Smilax officinalis* déjà cité, un tissu sous-épidermique collenchymatoïde; dans les vrilles d'un autre *Smilax*, un épais anneau collenchymateux sous-épidermique; enfin, chez le *Roxburghia viridiflora*, une couche sous-épidermique nettement collenchymateuse.

La valeur mécanique du collenchyme résulte déjà, avec une certitude suffisante, de la manière dont il est distribué dans le plante.

Pour surcroît de preuve, M. Ambronn a exécuté des mesures directes, qui ont montré que la résistance absolue du collenchyme, soumis à une charge [1]), est de peu inférieure à celle du sclérenchyme.

---

1) Qu'on me permette ici une petite digression sur la manière dont on évalue la résistance à la charge des tissus mécaniques.

Ordinairement, on regarde la charge maximum comme le poids le plus lourd que la *substance* des parois cellulaires puisse porter sans dépasser la limite d'élasticité, ou sans être déchirée.

Il est clair, toutefois, que pour connaître un peu exactement la résistance de la substance pariétale, il faudrait pouvoir opérer sur une cellule isolée. Ce qu'on a déterminé jusqu'ici, n'est autre chose que la résistance du *tissu*, calculée par mm^2 de *substance pariétale*, résistance qui ne concorde pas nécessairement avec celle de la substance pariétale elle-même. L'adhérence des cellules peut être, en effet, moins forte que la cohérence des particules de la paroi cellulaire. En ce sens, il serait possible que, à

Tout concourant ainsi à mettre hors de doute la signification mécanique du collenchyme, on peut se demander jusqu'à quel point la forme de ses cellules est elle-même en accord avec cette fonction.

Rappelons que les cellules, qui composent le collenchyme dit typique, sont allongées, qu'elles ont des extrémités plus ou moins pointues, qu'elles sont épaissies, principalement ou exclusivement aux angles, qu'elles présentent des espaces intercellulaires moins nombreux ou plus petits que ceux des cellules parenchymateuses ordinaires de l'écorce, ou même qu'elles manquent complétement de ces espaces, que leurs cavités sont presque toujours plus petites que celles du parenchyme du tissu fondamental, et enfin qu'elles contiennent pendant très longtemps un protoplasme vivant ou susceptible de vie.

Il n'est pas difficile de trouver les anneaux qui relient entre elles ces propriétés.

D'abord, la cellule collenchymateuse possède des caractères qui appartiennent à la cellule mécanique en général, telles que sa forme allongée, ses extrémités pointues et sa paroi épaissie.

Mais, en outre, ses propriétés physiologiques particulières impliquent des caractères anatomiques spéciaux.

Dans les tissus qui s'accroissent énergiquement, ou qui sont

égalité de résistance de la substance pariétale, un tissu composé de cellules parenchymateuses cédât sous une charge beaucoup plus faible qu'un tissu formé d'éléments prosenchymateux (la charge étant calculée par unité de surface de la substance pariétale); dans un tissu prosenchymateux, les jonctions des cellules deviennent, en effet, beaucoup plus solides, le éléments n'étant plus simplement superposés l'un à l'autre, mais emboîtés par leurs extrémités pointues.

A ce point de vue, il se pourrait donc qu'une partie de la grande force de résistance du collenchyme à forme purement prosenchymateuse ne dût pas être attribuée à la fermeté de la substance pariétale, mais à la solidité de l'union mutuelle des cellules. En tout cas, sans examen ultérieur, les nombres trouvés jusqu'ici ne peuvent être regardés comme représentant toujours la valeur exacte de la résistance de la paroi cellulaire.

susceptibles d'accroissement, on trouve ordinairement des parois minces; celles-ci paraissent favoriser les communications mutuelles et, par suite, le phénomène d'accroissement tout entier. Que le collenchyme a besoin de bonnes communications, c'est ce que montrent bien les canaux ponctués très larges, souvent extraordinairement larges, qui existent dans les cellules collenchymateuses dont la paroi entière est épaissie [1]). Pour le collenchyme typique, dans lequel une partie de la paroi n'a pas subi d'épaississement, la possession de canaux ponctués est plus ou moins superflue; aussi y sont-ils, comme nous l'avons vu, étroits et peu nombreux.

Ce besoin de bonnes communications peut être la cause pour laquelle les épaississements se déposent justement aux places qui ont le moins d'importance au point de vue de la communication par contact mutuel, savoir, aux angles. Là, en effet, les parois (primaires) des cellules parenchymateuses s'écartent l'une de l'autre pour former des espaces intercellulaires; chez les cellules collenchymateuses, cela n'est généralement pas le cas, mais la place où ailleurs apparaîtrait une cavité intercellulaire prend une plus grande signification mécanique et reste remplie de matière intercellulaire, qu'on peut en extraire au moyen de l'acide chromique; la barre ainsi formée est notablement renforcée, ou acquiert seulement sa valeur mécanique, par les épaississements (secondaires) qui se déposent, à cette même place, sur la face interne de la paroi cellulaire. La perte des cavités intercellulaires a toutefois rendu le collenchyme impropre à une fonction, celle de l'assimilation, car la communication directe avec l'air extérieur est ainsi devenue impossible et l'échange des gaz ne peut plus se faire que par diffusion; de là vient que la chlorophylle est si parcimonieusement représentée dans le vrai collenchyme,

---

1) Voir, par exemple, les *Ilex Perado* et *Aucuba japonica* (Pl. VIII, fig. 2 et 3). Même en cas d'épaississement faible, uniformément étendu à la paroi entière, on trouve un grand nombre de canaux ponctués, comme chez le *Galium rubioides*.

de là aussi que, plus elle s'y montre abondante, plus les épaississements s'atténuent et les cavités intercellulaires se développent.

Au premier abord, il pourrait sembler singulier que le collenchyme possède une si grande valeur mécanique, alors que les barres de matière collenchymateuse, qui se trouvent aux angles des cellules, sont souvent unies entre elles par des parois extrêmement minces. Mais un grand rôle revient ici au contenu cellulaire, qui relie solidement les barres collenchymateuses, en remplissant toute la cavité de la cellule et peut-être en exerçant une pression par sa turgescence, bien que, en général, cette pression ne paraisse pas être considerable. Suivant M. Haberlandt [1]), ces minces parties de parois, qui unissent les barres collenchymateuses, feraient que celles-ci peuvent aisément se déplacer un peu les unes par rapport aux autres, et rendraient ainsi le tissu encore plus apte à servir de soutien à des organes mobiles et changeant de forme.

Lorsque les épaississements s'étendent plus loin, il arrive très fréquemment que cette extension s'opère en premier lieu le long des parois tangentielles. C'est ce qu'on voit très nettement, par exemple, chez le *Habrothamnus elegans* (Pl. IX, fig. 6). Immédiatement sous l'épiderme, se trouve ici un collenchyme formé de deux ou trois assises de cellules. A partir des angles de ces cellules, les épaississements décroissent assez brusquement dans la direction radiale, mais dans le sens tangentiel les épaississements voisins se confondent entre eux, et au milieu de la paroi tangentielle d'une cellule l'épaississement n'est souvent pas beaucoup moindre que dans les angles. Comme les cellules de l'assise collenchymateuse située immédiatement sous l'épiderme sont à peu près toutes de même grandeur, et que, par suite, les épaississements tangentiels se raccordent exactement entre eux, on obtient ici, en quelque sorte, deux anneaux concentriques de substance collenchymateuse, unis par de minces parois radiales.

---

[1]) Haberlandt, *Die physiologischen Leistungen der Pflanzengewebe*, dans Schenk, *Handbuch der Botanik*, t. II, 1882, p. 599.

Un peu plus irrégulières, mais très fortement épaissies, sont les plaques collenchymateuses tangentielles qu'on voit dans la partie externe des faisceaux de collenchyme du *Rubia peregrina* (Pl. VIII, fig. 12) [1]).

Fréquemment, en outre, on rencontre une disposition plus ou moins analogue du tissu mécanique, avec cette différence que ce ne sont pas les parois tangentielles des cellules individuelles qui sont plus fortement épaissies, mais que le stéréome entier se distribue en deux cylindres creux, rattachés l'un à l'autre par des pièces radiales. Une pareille distribution du tissu mécanique peut, selon M. Schwendener, être très utile pour prévenir la rupture ou l'aplatissement de l'organe.

Lorsque l'épaississement collenchymateux est essentiellement borné à certaines parties de la cellule, sa valeur mécanique est naturellement beaucoup moindre que si la paroi cellulaire tout entière était épaissie au même degré. Cette perte de valeur mécanique est toutefois compensée, au moins en partie, d'une autre manière. Les cellules collenchymateuses, de même que la plupart des autres stéréides, ont en effet un faible diamètre, ou du moins un diamètre moindre que celui des cellules ambiantes; d'où il résulte que, pour une surface donnée, le nombre des cellules, par conséquent le nombre des parois épaissies, et par conséquent aussi la valeur mécanique, sont devenus d'autant plus grands. En outre, dans un collenchyme convexe, la saillie interne des épaississements angulaires peut être une conséquence de la tendance à rendre l'épaississement aussi considérable que possible, étant donnés le volume de la cellule et la condition qu'une partie de la paroi cellulaire ne s'épaississe pas.

Sous le rapport de la quantité de matière pariétale qui peut être rassemblée sur une surface déterminée, abstraction faite de la valeur mécanique spécifique de cette matière, il est évident

---

1) On trouvera d'autres exemples chez les *Pyrethrum multiflorum*, *Helenium commutatum*, *Matricaria eximia*, *Achillea filipendula*, *Valeriana officinalis*, *Knautia montana*.

que le collenchyme le cède au sclérenchyme, dans lequel un épaississement uniforme des parois cellulaires peut s'accompagner de la réduction, jusqu'à disparition complète, de la cavité de la cellule.

Il a déjà été dit, plus haut, qu'une forme cellulaire déterminée est généralement désignée comme collenchyme typique. Moi aussi, je crois devoir appliquer ce nom à la forme en question; non seulement parce que par son aspect extérieur elle se distingue le plus des formes cellulaires affines, et à ce titre mérite donc le mieux sa dénomination spéciale, mais aussi parce que cette forme réunit le mieux, à mon avis, les deux conditions auxquelles, pour des raisons physiologiques, la cellule collenchymateuse paraît devoir satisfaire en général, savoir: posséder une paroi fortement épaissie, et rester néanmoins en communication très libre avec les tissus ambiants.

EXPLICATION DES FIGURES.

Lorsque le contraire n'est pas mentionné, les figures sont prises d'après des coupes transversales.

Pl. VIII.

Fig. 1 (840). Coupe longitudinale d'une cellule collenchymateuse médullaire du *Habrothamnus elegans*.

„ 2 (695). Canal ponctué d'une cellule collenchymateuse de l'*Aucuba japonica*.

„ 3 (470). Cellule collenchymateuse de l'*Aucuba japonica*.

„ 4 (665). Paroi d'une cellule collenchymateuse du *Phlox paniculata*, colorée par le réactif de Schulze.

„ 5 (665). Cellule collenchymateuse fortement épaissie de l'écorce du *Phlox paniculata*, après traitement par le sulfate d'aniline et l'acide sulfurique.

Fig. 6 (665). Cellules semblables de la même plante: leurs parois ne sont pas encore lignifiées.
„ 7 (665). Paroi d'une semblable cellule: sur tout un côté, la lamelle moyenne est dédoublée.
„ 8, 9 (665). Cellules du *Dieffenbachia costata*, macérées dans l'acide chromique.
„ 10 (665). Jeunes cellules collenchymateuses de la même plante, traitées de la même manière.
„ 11. Représentation schématique de la disposition des couches pariétales lors de la division (cloisonnement) d'une cellule collenchymateuse.
„ 12 (140). Côte collenchymateuse sous-épidermique du *Rubia peregrina.*

Pl. IX.

Fig. 1 (450). Petit groupe cortical du *Lavatera arborea;* séparation très tranchée du collenchyme et du parenchyme à chlorophylle.
„ 2 (865). Cellule collenchymateuse du *Lavatera arborea*, après macération dans l'acide chromique.
„ 3 (865). Cellule collenchymateuse du *Panax fruticosum*, traitée de la même manière.
„ 4 (440). Petit groupe collenchymateux sous-épidermique du *Fittonia argyroneura*, plus ou moins degénéré par l'introduction de la chlorophylle.
„ 5 (336). Place de la tige d'un *Ficus* où la chlorophylle est en voie de pénétration vers la périphérie; la partie la plus externe du collenchyme présente des épaississements et des cavités intercellulaires moindres, mais ne contient pas encore de chlorophylle; plus près du centre, on trouve des cellules parenchymateuses minces, avec chlorophylle.
„ 6 (665). Couche collenchymateuse sous-épidermique du *Habrothamnus elegans.*

Les figures des deux planches suivantes sont toutes schématiques. Les détails accessoires y sont omis, les détails essentiels indiqués seulement en contour.

Dans les limites du dessin (sauf pour la fig. 1, Pl. X), la teinte du papier représente le tissu parenchymateux; le collenchyme est figuré par du blanc; çà et là sont indiqués, par du vert, les tissus assimilateurs, par du jaune, le tissu composé d'éléments prosenchymateux lignifiés. Les faisceaux vasculaires, ou les faisceaux mestomatiques, ne sont donnés qu'en contour et ombrés; parfois on a aussi tracé le contour de quelques particularités très apparentes, par exemple, de certains gros vaisseaux.

Pl. X.

Fig. 1 (236). Epiderme collenchymateux du pédoncule de l'*Allium ursinum*.
„ 2 (225). Faisceaux vasculaires à revêtement collenchymateux d'un *Dieffenbachia* (?).
„ 3 (22). Tige de *Ficus spec.*
„ 4 (22). Tige du *Panax fruticosum*.
„ 5 (21). Tige du *Stachys sylvatica*.
„ 6 (30). Pédoncule de l'*Angelica sylvestris*.
„ 7 (22). Pétiole de *Ficus spec.*
„ 8 (34). Petiole du *Lavatera arborea*.

Pl. XI.

Fig. 1 (30). Pétiole du *Levisticum officinale*.
„ 2 (55). Partie d'un pétiole du *Polemonium grandiflora*.
„ 3 (22). Nervure moyenne du *Fittonia argyroneura*.
„ 4 (45). „ „ „ *Passiflora trifasciata*.
„ 5 (28). „ „ „ *Ficus spec.*
„ 6 (46). „ „ de *Abutilon tiliæfolium*.

SUR QUELQUES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES SIMPLES

DU

THÉORÈME D'ABEL,

PAR

H. J. RINK.

Les tomes 63 et 64 du Journal de Crelle renferment différents Mémoires de M. Clebsch, relatifs à un même sujet. Le premier traite de l'application des fonctions abéliennes à la Géométrie en général, et, en particulier, à quelques problèmes concernant les courbes du 4e ordre, tandis que, dans les 2e et 3e Mémoires, les fonctions abéliennes sont appliquées à des courbes du n^e degré possédant $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ et $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles et points de rebroussement, c'est-à-dire, à des courbes des genres 0 et 1. Enfin, on trouve encore un Mémoire donnant, toujours à l'aide de fonctions abéliennes, une solution d'un problème posé par Steiner sur des courbes du 3e degré.

La haute importance de cette introduction des fonctions abéliennes dans la Géométrie n'a pas besoin d'être démontrée; mais je pense qu'il ne sera pas tout à fait sans utilité d'indiquer quelques cas simples dans lesquels on peut, sans aucun autre calcul, déduire du théorème d'Abel, tel que M. Clebsch le présente, des propriétés géométriques.

1. On sait que les intégrales abéliennes se laissent ramener à trois espèces. Celles de la première espèce ont, lorsque l'équation $F(x, y) = 0$ indique la relation existant entre x et y, la forme:

$$\int \frac{\theta(x, y)}{\frac{d F(x, y)}{d y}} d x,$$

où $F(x, y)$ et $\theta(x, y)$ sont des polynômes entiers et rationnels en x et y, mais où le degré de $F(x, y)$ est de 3 unités plus élevé que celui de $\theta(x, y)$. Cette intégrale jouit de la propriété de conserver toujours des valeurs finies.

Or, le nombre de ces intégrales de la première espèce est égal à ce que M. Clebsch nomme le genre de la courbe $F(x, y) = 0$, et il peut donc être représenté par $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, si n désigne le degré de la courbe et d le nombre de ses points doubles et de ses points de rebroussement.

Le théorème d'Abel peut maintenant, en tant qu'il a rapport à ces intégrales, être exprimé ainsi: Si la courbe $F(x, y) = 0$ est coupée par une courbe $\varphi(x, y) = 0$, qui par la variation continue de ses paramètres se transforme dans la courbe $\psi(x, y) = 0$, la somme des variations qu'une intégrale abélienne de la première espèce subit sur les trajets parcourus par chacun des points d'intersection, est $= 0$.

Comme éclaircissement, je développerai le cas simple (auquel se rapportent aussi en premier lieu nos applications géométriques) où une courbe du 3e ordre est coupée par une ligne droite.

Lorsque la courbe du 3e ordre

$$F(x,y) = y^3 + (ax+b)y^2 + (cx^2+dx+e)y + (fx^3+gx^2+hx+k) = 0$$

n'a ni point double ni point de rebroussement, il y a une seule intégrale de la première espèce de la forme $\int \frac{d x}{\frac{d F(x, y)}{d y}}$. La

ligne droite variable a pour équation $y = \delta x + \delta_1$, tandis que α et α_1, β et β_1 représentent respectivement les valeurs initiales et finales de δ et δ_1.

Les points d'intersection de la droite avec la courbe $(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3)$ sont déterminés par l'équation:

$$F(x_1, \delta + \delta_1 x) = \Phi(x) = (\delta + \delta_1 x)^3 + (a x + b)(\delta + \delta_1 x)^2 + \\ + (c x^2 + d x + e)(\delta + \delta_1 x) + (f x^3 + g x^2 + h x + k) = 0.$$

Les valeurs initiales de x_1, x_2, x_3, qui correspondent à α et α_1, sont a_1, a_2, a_3; les valeurs finales sont b_1, b_2, b_3. Or, on a:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} dx + \frac{d\Phi(x)}{d(\delta + \delta_1 x)}(d\delta + x\, d\delta_1) = 0$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{\frac{dF(x, y)}{dy}} = \frac{dx}{\frac{d\Phi(x)}{d(\delta + \delta_1 x)}} = -\frac{d\delta}{\frac{d\Phi(x)}{dx}} - \frac{x\, d\delta_1}{\frac{d\Phi(x)}{dx}},$$

d'où

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx_1}{\frac{dF(x_1\, y_1)}{dy_1}} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx_2}{\frac{dF(x_2\, y_2)}{dy_2}} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx_3}{\frac{dF(x_3\, y_3)}{dy_3}} = -\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{\frac{d\Phi(x_1)}{dx_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{d\Phi(x_2)}{dx_2}} + \frac{1}{\frac{d\Phi(x_3)}{dx_3}} \right) d\delta - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\frac{x_1}{\frac{d\Phi(x_1)}{dx_1}} + \frac{x_2}{\frac{d\Phi(x_2)}{dx_2}} + \frac{x_3}{\frac{d\Phi(x_3)}{dx_3}} \right) d\delta_1.$$

Evidemment, chacune des deux fonctions qui se trouvent sous le signe d'intégration dans le second membre de la dernière équation est identiquement $= 0$, et il en est par conséquent de même de la somme des intégrales qui entrent dans le premier membre; par là, le théorème est démontré pour ce cas.

Mais ce théorème d'Abel peut aussi être très facilement établi d'une manière générale, à l'aide d'une proposition de Jacobi. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe du degré n,

et $\varphi(x, y) = 0$ celle de la courbe sécante du degré m, courbe dont les paramètres sont de nouveau censés variables; on a alors:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0 \text{ et}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \delta\varphi = 0,$$

où $\delta\varphi$ représente la somme des termes provenant de la variation des paramètres. De cette équation, il suit:

$$\frac{dx}{\frac{dF(x, y)}{dy}} = \frac{\delta\varphi}{\frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy}}.$$

Par conséquent:

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int \frac{\theta(x_i, y_i)\, dx_i}{\frac{dF(x_i, y_i)}{dy_i}} = \int \sum_{i=1}^{i=mn} \frac{\theta(x_i, y_i)\, \delta\varphi_i}{\frac{dF_i}{dy_i} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx_i} - \frac{dF_i}{dx_i} \cdot \frac{d\varphi_i}{dy_i}},$$

où x_i, y_i désignent les coordonnées d'un des mn points d'intersection des courbes $F = 0$ et $\varphi = 0$.

Or, d'après un théorème de Jacobi (voir, entre autres, Serret, *Alg. Sup.* I, 630), $\Sigma \frac{P(x, y)}{\frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy}} = 0$, lorsque la somme s'étend aux solutions communes aux équations $F(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$ et qu'en outre le degré du numérateur est plus bas que celui du dénominateur. Comme F est du degré n, φ du degré m et θ du degré $(n - 3)$, le dénominateur, dans la forme $\frac{\theta(x, y) . \delta\varphi}{\frac{dF}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy}}$, est du degré $m + n - 2$ et le numérateur du degré $m + n - 3$: le théorème de Jacobi est donc applicable et l'expression sous le signe d'intégration est identiquement 0, d'où résulte la démonstration du théorème d'Abel.

2. Dans les considérations suivantes, je me bornerai au cas où les trajets parcourus par les différents points d'intersection sont tous réels. Pour cela, — à moins que le mouvement de la courbe sécante ne soit renfermé entre certaines limites, de sorte que le nombre des intersections situées sur différentes parties reste le même dans l'état initial et dans l'état final, — il est nécessaire que les points réels de la courbe forment une suite continue et que la courbe ne se compose donc pas de 2 ou plusieurs branches.

Examinons, en premier lieu, le cas où une courbe du troisième ordre, sans point double ni point de rebroussement, est coupée par une ligne droite. On peut se figurer que le passage continu de la droite sécante, de la position initiale à la position finale, s'effectue de la manière suivante. Les points d'intersection initiaux étant A, B, C, et les points d'intersection terminaux A', B', C', laissons d'abord A en place et portons B le long de le courbe en B': puisque deux des points d'intersection étaient situés sur la courbe, le troisième point d'intersection aura également parcouru un trajet réel. Ensuite, par un second déplacement, A peut être amené en A', la droite tournant autour de B', et en même temps C viendra se placer en C'. Dans un pareil mouvement, chacune des trois intersections a parcouru un trajet réel. Or, d'après le théorème d'Abel, la somme des intégrales de la première espèce, prises sur les trajets parcourus par les points A, B, C, est $= 0$; c'est ce que nous exprimerons dans la suite par $\int A\,A' + \int B\,B' + \int C\,C' = 0$. La première lettre du trajet auquel l'intégrale se rapporte appartient à la position initiale de la droite, la seconde lettre, à la position finale; on a donc: $\int A\,A' + \int A'\,A = 0$.

Comme les points réels de la courbe sont supposés former une suite continue, on peut parvenir par deux chemins différents — en passant par l'infini ou sans passer par l'infini — d'un point A de la courbe à un autre point A'. Si l'on désigne ces deux chemins par $Ap\,A'$ et $Aq\,A'$, l'expression

$$\int Ap\,A' + \int A'q\,A = \int Ap\,A' - \int Aq\,A',$$

ou l'intégrale étendue à la courbe entière, parcourue dans une direction déterminée, est évidemment une quantité finie, que nous appellerons K. A cause de ces deux manières différentes d'aller d'un point initial à un point final, il peut se faire que la somme d'un certain nombre d'intégrales ne soit pas $= 0$, mais égale à un nombre entier de fois K. Lorsque nous voudrons laisser ce point indécis, nous emploierons, au lieu du signe $=$, le signe $\equiv$.

La réciproque du théorème d'Abel nous apprend une propriété géométrique. Si la somme de trois intégrales abéliennes de la 1e espèce sur une courbe du 3e ordre est égale ($\equiv$) à 0, et que les points initiaux des trajets soient situés en ligne droite, les points terminaux de ces trajets sont également en ligne droite. En effet, si la droite passait par deux points terminaux sans passer par le troisième, il ne serait pas satisfait au théorème d'Abel.

Dans le cas particulier où l'un des points d'intersection ne change pas de place, l'une des trois intégrales disparaît de la somme, et c'est donc la somme des deux intégrales restantes qui est $= 0$. De là résulte, par inversion, cette propriété géométrique : Si la somme de deux intégrales abéliennes de la 1e espèce est égale ($\equiv$) à 0 sur une courbe du 3e ordre, les droites qui unissent les points initiaux et terminaux des trajets parcourus par les intégrales se coupent sur la courbe.

3. A l'aide de ces propriétés, une foule de propositions connues, concernant les courbes du 3e ordre, se laissent démontrer facilement. J'en donnerai quelques exemples.

a. Deux droites coupent une courbe du 3e ordre; les 6 points d'intersection ainsi formés sont joints 2 à 2 par des lignes droites, dont chacune détermine sur la courbe un troisième point; les trois points obtenus de cette manière sont situés en ligne droite.

$A\,B\,C$ et $D\,E\,F$ étant les droites sécantes, $A\,D$ et $B\,E$ déterminent sur la courbe les points P et Q, et il faut, d'après la proposition, que $P\,Q$ et $C\,F$ se coupent sur la courbe. Pour cela, il suffit de l'égalité $\int P\,C + \int Q\,F \equiv 0$.

$$\text{Or, nous avons: } \int C\,E \equiv \int Q\,A \quad (\text{passage de } A\,B\,C \text{ à } Q\,B\,E)$$

$$\int E\,P \equiv \int A\,F \quad (\text{passage de } E\,D\,F \text{ à } P\,D\,A)$$

$$\text{d'où} \quad \int C\,P \equiv \int Q\,F \quad \text{ou} \int P\,C + \int Q\,F \equiv 0,$$

ce qui prouve la proposition.

b. Si, aux points d'intersection d'une droite et d'une courbe du 3e ordre, on mène des tangentes à cette dernière, chacune de ces tangentes détermine un nouveau point sur la courbe: ces trois points sont situés en ligne droite.

Soit $A\,B\,C$ la droite sécante; les tangentes en A, B et C déterminent respectivement les points P, Q et R.

$$\text{On a alors: } \int B\,A + \int C\,P \equiv 0 \quad (\text{passage de } A\,B\,C \text{ à } A\,P)$$

$$\int C\,B + \int A\,Q \equiv 0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \ A\,B\,C \ \text{,,} \ A\,Q)$$

$$\int A\,C + \int B\,R \equiv 0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \ A\,B\,C \ \text{,,} \ C\,R)$$

$$\text{d'où}: \int B\,A + \int C\,B + \int A\,C + \int C\,P + \int A\,Q + \int B\,R \equiv 0,$$

$$\text{mais} \int B\,A + \int C\,B + \int A\,C \equiv 0, \text{ donc}$$

$$\int C\,P + \int A\,Q + \int B\,R \equiv 0;$$

de sorte que les points P, Q et R sont situés sur une même droite.

4. La proposition de Steiner, dont M. Clebsch s'est occupé dans l'un des Mémoires ci-dessus cités, peut également être démontrée, de cette manière. Voici l'énoncé de cette proposition: Si l'on choisit sur une courbe du 3e ordre deux points P et Q, et que par un point quelconque A de la courbe on mène la droite PA, celle-ci détermine sur la courbe un nouveau point B; de même, la droite QB détermine un point C, la droite PC un point D, etc. Le polygone ainsi inscrit, $ABCDE\ldots$ se fermera, ou non. S'il se ferme, cela a lieu indépendamment de la situation du point A et le polygone a un nombre pair de côtés.

Pour que le polygone se ferme, il faut qu'une droite menée par P conduise à un point Z, qui soit situé en ligne droite avec les points Q et A. ZA est alors le dernier côté du polygone et passe par Q, tandis que le premier côté passe par P, et les suivants alternativement par Q et par P; le nombre des côtés est donc nécessairement pair, égal à $2n$. Nous pouvons alors écrire les équations suivantes:

$$\int PQ + \int AC \equiv 0 \quad \text{(passage de } PBA \text{ à } QBC)$$

$$\int PQ + \int CE \equiv 0 \quad (\quad \text{"} \quad \text{"} \quad PDC \text{ "} QDE)$$

. . . .

$$\int PQ + \int YA \equiv 0 \quad (\quad \text{"} \quad \text{"} \quad PZY \text{ "} QZA)$$

Par addition, et en remarquant que $\int AC + \int CE + \ldots\ldots + \int YA = 0$, on obtient

$$n \int PQ = p.\,K.$$

p est évidemment un nombre entier $< n$ et n'ayant avec n aucun diviseur commun; s'il y avait un pareil diviseur, le polygone se serait déjà fermé plus tôt.

La condition à laquelle il doit être satisfait pour que le polygone se ferme est donc qu'on ait $\int P\, Q = \frac{p.\, K}{n}$, et cette condition est indépendante de la situation du point A. Ainsi se trouve démontrée la proposition de Steiner. — M. Clebsch traite, avec assez de détails, les cas de $n = 2$ et $n = 3$; je me bornerai à une remarque concernant le cas $n = 2$.

Si deux droites, tangentes aux points P et Q, se coupent sur la courbe en un point R, il suit du passage de la droite $P\,R$ à $Q\,R$:

$$\int P\, Q + \int P\, Q - K = 0 \qquad \text{ou} \int P\, Q = \frac{K}{2}.$$

Les points P et Q déterminent donc un nombre infini de tétragones, dont les sommets se trouvent sur la courbe et dont les côtés opposés se coupent aux points P et Q. Ce sont donc des quadrilatères inscrits complets, et nous rencontrons la proposition que les tangentes, menées à la courbe aux sommets des angles opposés, se coupent sur la courbe.

5. Ainsi que l'a déjà fait observer M. Clebsch, la proposition de Steiner, dont il a été question au § précédent, est le cas le plus particulier d'un problème général, qu'on peut appliquer aux courbes de tous les degrés, tant planes qu'à double courbure. Nous allons considérer maintenant un cas déterminé de ce problème général, cas dont la proposition de Steiner se laisse aisément déduire comme cas plus particulier. Notre proposition peut être énoncée de cette manière:

Il y a un nombre infini de polygones à $2n$ angles, dont les sommets sont situés sur une courbe du troisième degré et dont les côtés passent successivement par $2n$ points fixes situés sur la courbe. On peut toujours prendre arbitrairement $2n-1$ de ces points.

Lorsque les points par lesquels passent les côtés impairs se confondent en un seul, et qu'il en est de même des points par

lesquels passent les côtés pairs, cette proposition se transforme évidemment en celle de Steiner.

Soient A_0, A_1 . . . . . A_{2n-1} les sommets successifs de $2n$ angles de notre polygone, et désignons par $\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{23}$ . . . . . les points où les côtés $A_0 A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ . . . . . coupent la courbe pour la troisième fois; on a alors

$$\int A_0 A_2 + \int \alpha_{01}\, \alpha_{12} = 0; \quad \int A_2 A_4 + \int \alpha_{23}\, \alpha_{34} = 0 \ldots\ldots$$

$$\int A_{n-2} A_0 + \int \alpha_{2n-2,\, 2n-1}\, \alpha_{2n-1,\, 0} = 0; \text{ d'où il suit par addition:}$$

$$\int \alpha_{01}\, \alpha_{12} + \int \alpha_{23}\, \alpha_{34} + \ldots\ldots \int \alpha_{2n-2,\, 2n-1}\, \alpha_{2n-1,\, 0} \equiv 0.$$

C'est à cette relation que les points d'intersection des côtés doivent satisfaire pour que le polygone se ferme; comme elle est indépendante de la situation des points A, la proposition est démontrée, et en même temps on voit que, lorsque 2_{n-1} points α sont donnés, le $2n^{ième}$ point est entièrement déterminé par cette relation.

Dans beaucoup de cas, on peut constater une liaison géométrique simple entre les points α, ainsi que nous allons le faire voir pour quelques valeurs de n.

$$n = 2. \qquad \int \alpha_{01}\, \alpha_{12} + \int \alpha_{23}\, \alpha_{30} \equiv 0.$$

Les droites $\alpha_{01}\, \alpha_{23}$ et $\alpha_{12}\, \alpha_{30}$, qui joignent les 3ièmes points d'intersection appartenant aux côtés opposés du quadrilatère, se coupent sur la courbe; ce théorème concorde évidemment avec celui mentionné au § 3, en *a*. Pour passer à la proposition de Steiner, il est nécessaire que les points α_{01}, α_{23} et α_{12}, α_{30} coïncident, ce qui transforme les droites de jonction en tangentes. On retrouve donc la condition pour la paire de points de Steiner correspondant au quadrilatère, à savoir, que leurs points tangentiels doivent se confondre.

$$n = 3. \qquad \int \alpha_{01} \alpha_{12} + \int \alpha_{23} \alpha_{34} + \int \alpha_{45} \alpha_{50} \equiv 0.$$

La relation géométrique entre ces 6 points est la suivante: Si l'on détermine les 3[ièmes] points d'intersection β et β' des droites $\alpha_{01}\,\alpha_{23}$ et $\alpha_{12}\,\alpha_{34}$, les droites $\beta\,\alpha_{50}$ et $\beta'\,\alpha_{45}$ doivent se couper sur la courbe. Car on a alors

$$\int \alpha_{01} \alpha_{12} + \int \alpha_{23} \alpha_{34} + \int \beta \beta' = 0 \quad \text{et} \int \beta' \beta + \int \alpha_{45} \alpha_{50} = 0,$$

d'où résulte la relation énoncée.

D'une manière moins générale, il y est satisfait lorsque les points α_{01}, α_{23}, α_{45} et α_{12}, α_{34}, α_{50} sont situés en ligne droite. Or, ces trois points coïncidant en un point d'inflexion, il s'ensuit qu'une paire de points d'inflexion forme une paire de points de Steiner pour l'hexagone.

$$n = 4. \qquad \int \alpha_{01} \alpha_{12} + \int \alpha_{23} \alpha_{34} + \int \alpha_{45} \alpha_{56} + \int \alpha_{67} \alpha_{70} \equiv 0.$$

La relation géométrique entre les 8 points α se laisse formuler ainsi: Si les droites $\alpha_{01}\,\alpha_{23}$ et $\alpha_{12}\,\alpha_{34}$ rencontrent la courbe pour la troisième fois aux points β et β', et de même les droites $\alpha_{45}\,\alpha_{67}$ et $\alpha_{56}\,\alpha_{70}$ aux points γ et γ', les droites $\beta\,\gamma$ et $\beta'\,\gamma'$ doivent se couper sur la courbe. A l'aide de cette relation, lorsque 7 points α sont donnés, le 8[e] peut être construit.

Ces 8 points peuvent maintenant se transformer, de la manière suivante, dans la paire de points de Steiner. Faisons d'abord coïncider α_{01} avec α_{45}, α_{12} avec α_{56}, α_{23} avec α_{67} et α_{34} avec α_{70}, ce qui change les droites $\beta\,\gamma$ et $\beta'\,\gamma'$ en tangentes. Si alors $\alpha_{01,\,45}$ se confond encore avec $\alpha_{23,\,67}$, et $\alpha_{12,\,56}$ avec $\alpha_{34,\,70}$, c'est-à-dire, si les droites qui joignent ces points deviennent aussi des tangentes, on a la paire de points de Steiner pour l'octogone et, pour déterminer leur situation, la condition que leurs seconds points tangentiels doivent coïncider.

$$n = 5. \quad \int \alpha_{01} \alpha_{12} + \int \alpha_{23} \alpha_{34} + \int \alpha_{45} \alpha_{56} + \int \alpha_{67} \alpha_{78} + \int \alpha_{89} \alpha_{90} \equiv 0.$$

Si l'on fait passer une conique par les 5 troisièmes points d'intersection des côtés pairs, et de même par ceux des côtés impairs, la relation géométrique entre les 10 points consiste en ce qu'il y a coïncidence des deux points où les coniques coupent la courbe pour la 6ième fois.

Evidemment, on pourrait continuer de cette manière et trouver, pour des valeurs plus élevées de n, les relations géométriques entre les points a.

6. On peut traiter d'une manière tout à fait analogue l'intersection par une courbe du second ordre.

Nous supposerons de nouveau que la courbe donnée du 3e ordre forme un tout continu et que ses 6 points d'intersection avec la conique, dans l'état initial et dans l'état final, soient tous réels. La conique peut alors être toujours déplacée de telle sorte que les trajets parcourus par les points d'intersection restent tous réels. En effet, en laissant d'abord fixes 4 des points d'intersection, le 5e peut être amené, le long de la courbe, de la situation de départ à celle d'arrivée : le 6e point d'intersection a alors parcouru un trajet réel. Si l'on répète cette opération 5 fois, en laissant chaque fois immobiles 4 points, parmi lesquels seront toujours compris les points déjà amenés dans leur situation finale, le 6e point d'intersection aura également atteint sa position définitive et tous auront parcouru des trajets réels. — Ici encore, il faut observer qu'on peut parvenir d'un point à l'autre par deux voies différentes, ce qui sera de nouveau indiqué par l'emploi du signe $\equiv$. De même encore que pour la ligne droite, on peut prendre indifféremment l'un ou l'autre des points d'intersection de la conique à l'état final pour le faire correspondre à une intersection déterminée de l'état initial.

Le théorème d'Abel dit ici que la somme des intégrales de la 1ère espèce, prises sur les 6 trajets parcourus par les points d'intersection, est $\equiv 0$; par inversion, on obtient cette propriété géométrique, que, si la somme de 6 intégrales de la 1ère espèce, sur une courbe du 3e ordre, est $\equiv 0$, et que les

points d'origine des trajets soient situés sur une section conique, les points terminaux de ces trajets sont également sur une conique. Comme conséquence de cette propriété, on peut conclure que, lorsque la somme de 5 pareilles intégrales est $= 0$, les sections coniques déterminées par les 5 points initiaux et par les 5 points terminaux des trajets parcourus par ces intégrales se coupent sur la courbe.

7. Plusieurs propriétés connues des courbes du 3e ordre, relatives à leur intersection avec une conique, peuvent être facilement démontrées à l'aide de cette inversion du théorème d'Abel. J'en donnerai une couple d'exemples.

a. Soit une courbe du 3e ordre coupée aux points A, B, C, D, E, F par une conique, et soient P, Q et R les points où cette même courbe est encore rencontrée par les droites AB, CD et EF. Si on mène alors par P, Q, R des droites quelconques, coupant la courbe en A', B'; C', D' et E', F', ces derniers points sont situés sur une section conique.

Pour le prouver, il suffit de faire voir que

$$\int AA' + \int BB' + \int CC' + \int DD' + \int EE' + \int FF' \equiv 0$$

Or, cela résulte immédiatement de:

$$\int AA' + \int BB' \equiv 0 \quad \text{(passage de } PAB \text{ à } PA'B')$$

$$\int CC' + \int DD' \equiv 0 \quad \text{,, ,, } QCD \text{ ,, } QC'D')$$

$$\int EE' + \int FF' \equiv 0 \quad \text{,, ,, } REF \text{ ,, } RE'F').$$

On peut regarder comme un cas particulier de cette proposition celui où les points P, Q et R sont situés en ligne droite; en prenant alors, au lieu de $PA'B'$ et $QC'D'$, les droites PQ et QP, la conique se réduit à une droite double.

b. Une autre propriété dit que, si des 6 points où une courbe du 3e ordre est coupée par un faisceau de coniques, il y en a

4 de fixes, les droites qui joignent les deux autres points d'intersection se coupent en un même point de la courbe.

Dans le passage d'une des coniques à une autre, 4 des 6 intégrales disparaissent donc de la somme, à cause de la constance de 4 points d'intersection; les deux intersections variables étant représentées par P, Q'; P'. Q', on a

$$\int P P' + \int Q Q' \equiv 0,$$

équation qui prouve que les droites $P Q$ et $P' Q'$ se coupent sur la courbe.

c. Lorsque les points d'intersection A et B, C et D, E et F coïncident, et que la conique est par conséquent tangente à la courbe aux points A, C et E, on peut faire passer par ces points une nouvelle conique, qui coupe en outre la courbe aux points A', C' et E'. Il s'agit de démontrer qu'on peut construire alors une conique qui soit tangente à la courbe en ces points A', C' et E'.

Du passage de la première conique à la seconde, il suit:

$$\int A A' + \int C C' + \int E E' \equiv 0,$$

$$\text{ou} \int A A' + \int A A' + \int C C' + \int C C' + \int E E' + \int E E' \equiv 0.$$

Or, dans cette équation est impliquée la preuve que les points A', A'; C', C'; E' E' sont également sur une conique, en d'autres termes, que la conique est tangente à la courbe.

De ce qui précède, on peut conclure aussi à la propriété suivante: Si une conique a en deux points P et Q un contact du second ordre avec une courbe du 3e ordre, et que la droite $P Q$ coupe la courbe en R (point d'inflexion), une droite menée par R déterminera sur la courbe deux points P' et Q', dans lesquels une nouvelle conique peut avoir avec la courbe un contact du second ordre.

8. De cette même manière se laissent démontrer aussi les propriétés dans lesquelles il ne s'agit que d'une seule conique, combinée avec une droite. Cette dernière, en effet, peut être comptée double et considérée alors comme une conique. Lorsqu'une droite coupe une courbe du 3e ordre aux points P, Q et R, et une conique aux points A, B, C, D, E, F, on a donc encore:

$$\int PA + \int PB + \int QC + \int QD + \int RE + \int RF \equiv 0.$$

Cette équation peut servir de nouveau à déduire des propriétés géométriques, soit directement, soit par inversion. En voici quelques exemples.

a. La droite ABC coupant la courbe, menons en un des points d'intersection, par exemple en C, la tangente, qui coupera encore la courbe en D; menons, en outre, par D une droite rencontrant la courbe en E et en F. Il y a alors une section conique qui est tangente en A et en B et passe par E et F.

Du passage de DC à DEF, il résulte

$$\int CE + \int CF \equiv 0,$$

ou $$\int AA + \int AA + \int BB + \int BB + \int CE + \int CF \equiv 0.$$

Les points A, A, B, B, E, F sont donc situés sur une conique, laquelle est tangente en A et en B.

b. Lorsque la droite ABC est sécante et qu'on fait passer par A, B et C d'autres droites coupant la courbe respectivement aux points P, Q; R, S; T, U, ceux-ci sont situés sur une conique. On a, en effet:

$$\int PB + \int QC \equiv 0 \quad \text{(passage de } APQ \text{ à } ABC\text{)}$$

$$\int RA + \int SC \equiv 0 \quad \text{,, \quad ,, } RBS \text{ ,, } ABC\text{)}$$

$$\int T A + \int U B \equiv 0 \text{ (passage de } T\,U\,C \text{ à } A\,B\,C),$$

donc $$\int R A + \int T A + \int P B + \int U B + \int Q C + \int S C \equiv 0,$$

d'où résulte la proposition énoncée.

9. Nous allons tâcher maintenant de donner à ces propriétés un peu plus d'extension. Cela peut d'abord se faire pour la propriété dont il a été question au § 7, *b*. Au lieu d'attribuer aux deux coniques 4 points fixes, on peut réduire ce nombre à 3, 2, 1, et trouver pour chacun de ces cas une propriété nouvelle.

Lorsque deux coniques, qui coupent la courbe en 6 points, ont trois de ces points, D, E, F, communs, il en résulte, A, B, C et A', B', C' étant les autres points d'intersection :

$$\int A A' + \int B B' + \int C C' = 0.$$

Si l'on mène maintenant les droites $B\,C$ et $B'\,C'$, qui rencontrent encore la courbe en D et D', on a $\int B B' + \int C C' = \int D' D$, et par conséquent

$$\int D' D + \int C C' = 0,$$

relation qui montre que $D\,C'$ et $D'\,C$ se coupent sur la courbe. De même, on pourrait en tirer la conséquence que deux coniques, qui passent par A, B, C et A', B', C', et en outre par deux points pris arbitrairement, se couperont encore une fois sur la courbe.

Lorsque deux coniques ont 2 points d'intersection communs, on a

$$\int A A' + \int B B' + \int C C' + \int D D' = 0;$$

mais, si α et α' désignent les troisièmes points d'intersection

des droites $A\,B$ et $A'\,B'$, β et β' les troisièmes points d'intersection des droites $C\,D$ et $C'\,D'$, on a aussi

$$\int A\,A' + \int B\,B' = \int \alpha\,\alpha' \text{ et } \int C\,C' + \int D\,D' = \int B\,B',$$

et par conséquent
$$\int \alpha\,\alpha' + \int \beta\,\beta' = 0,$$

d'où il suit que les droites $\alpha\,\beta$ et $\alpha'\,\beta'$ se coupent sur la courbe.

On pourrait aussi mener des coniques par les points A, B, C, D, P et A', B', C', D', P (P étant un point arbitrairement choisi); ces coniques auront alors encore un second point commun sur la courbe.

D'autres voies encore conduisent à trouver, au moyen de 4 coniques sécantes, des lignes qui se coupent sur la courbe. On y parvient en déterminant de différentes manières, à l'aide de sections coniques, la somme de 5 intégrales abéliennes. J'indiquerai succinctement les deux propriétés qu'on met ainsi facilement en évidence.

Menez deux coniques sécantes arbitraires, dont A, B, C, D, E, F et A', B, C', D', E', F' seront les points d'intersection avec la courbe; puis deux coniques déterminées par les points A, B, C, D', E' et A', B', C' D, E, qui fourniront respectivement, pour 6e intersection, les points G et G'; les droites $F\,F'$ et $G\,G'$ se couperont sur la courbe.

Menez de nouveau les deux coniques arbitraires sécantes en A, B, C, D, E, F et en A', B', C', D', E', F', puis les coniques déterminées par A, B, C, D, E' et A', B', C', D', E, qui fournissent respectivement, pour 6e intersection, les points G et G'. Les droites $F\,F'$ et $G\,G'$ se couperont encore sur la courbe.

De ces propriétés, on en déduirait évidemment un grand nombre d'autres, en faisant coïncider différents points d'intersection, ou en supposant qu'une conique se transforme en une ligne droite comptée double.

Il me semble superflu de montrer comment, en exécutant de différentes manières la sommation de 6, 7 ou un plus grand nombre d'intégrales abéliennes, on verra apparaître chaque fois des propriétés nouvelles.

Je me contenterai d'attirer encore l'attention sur une extension du théorème de Steiner, que ce géomètre avait lui-même déjà indiquée d'un mot. En prenant, outre les points P et Q, trois points fixes X, Y et Z, une première conique, menée par X, Y, Z, P et un point arbitraire A, déterminera une 6e intersection B; une seconde conique, passant par X, Y, Z, Q, B, fournira une 6e intersection C; et, en continuant de cette manière, on obtiendra une figure curviligne, formée par les arcs de coniques AB, BC, etc.; Or, à cette figure s'appliquera le même théorème qu'à la figure rectiligne dont il a été question ci-dessus. — En effet, puisque les 1e, 3e, 5e ... coniques passent toutes par les points X, Y, Z, P, les mêmes équations qui valaient alors vaudront encore dans le cas actuel, et par conséquent on pourra en tirer les mêmes conséquences.

10. Je signalerai encore quelques propriétés qui se présentent en cas d'intersection d'une courbe du 3e degré par une courbe arbitraire du degré m.

Lorsqu'on fait passer un nombre quelconque de courbes du degré m par $3m-1$ points d'une courbe du 3e degré, toutes ces courbes ont encore un point commun sur la courbe du 3e degré.

Lorsqu'on fait passer un nombre quelconque de courbes du degré m par $3m-2$ points d'une courbe du 3e degré, les droites qui sont déterminées chaque fois par les deux intersections restantes se coupent toutes en un même point de la courbe du 3e degré.

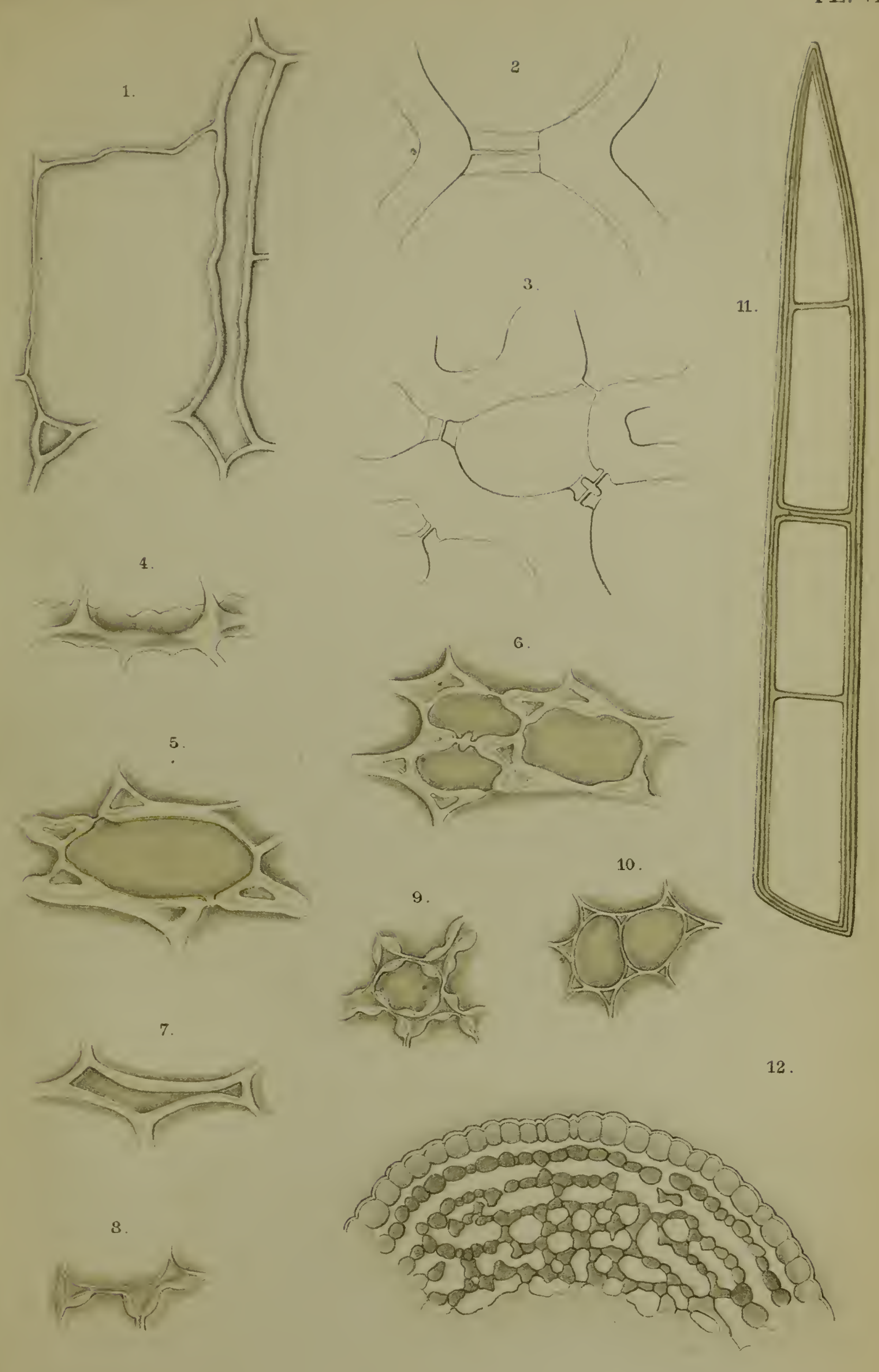
Lorsqu'on fait passer un nombre quelconque de courbes du degré m par $3m-5$ points d'une courbe du 3e degré, les coniques qui sont déterminées chaque fois par les 5 intersections restantes se coupent toutes en un même point de la courbe du 3e degré.

En général, lorsqu'on fait passer un nombre quelconque de courbes du degré m par $3m - (3p-1)$ points d'une courbe du 3e degré, les courbes du degré p qui passent par les $3p-1$ intersections restantes se coupent toutes en un même point de la courbe du 3e degré.

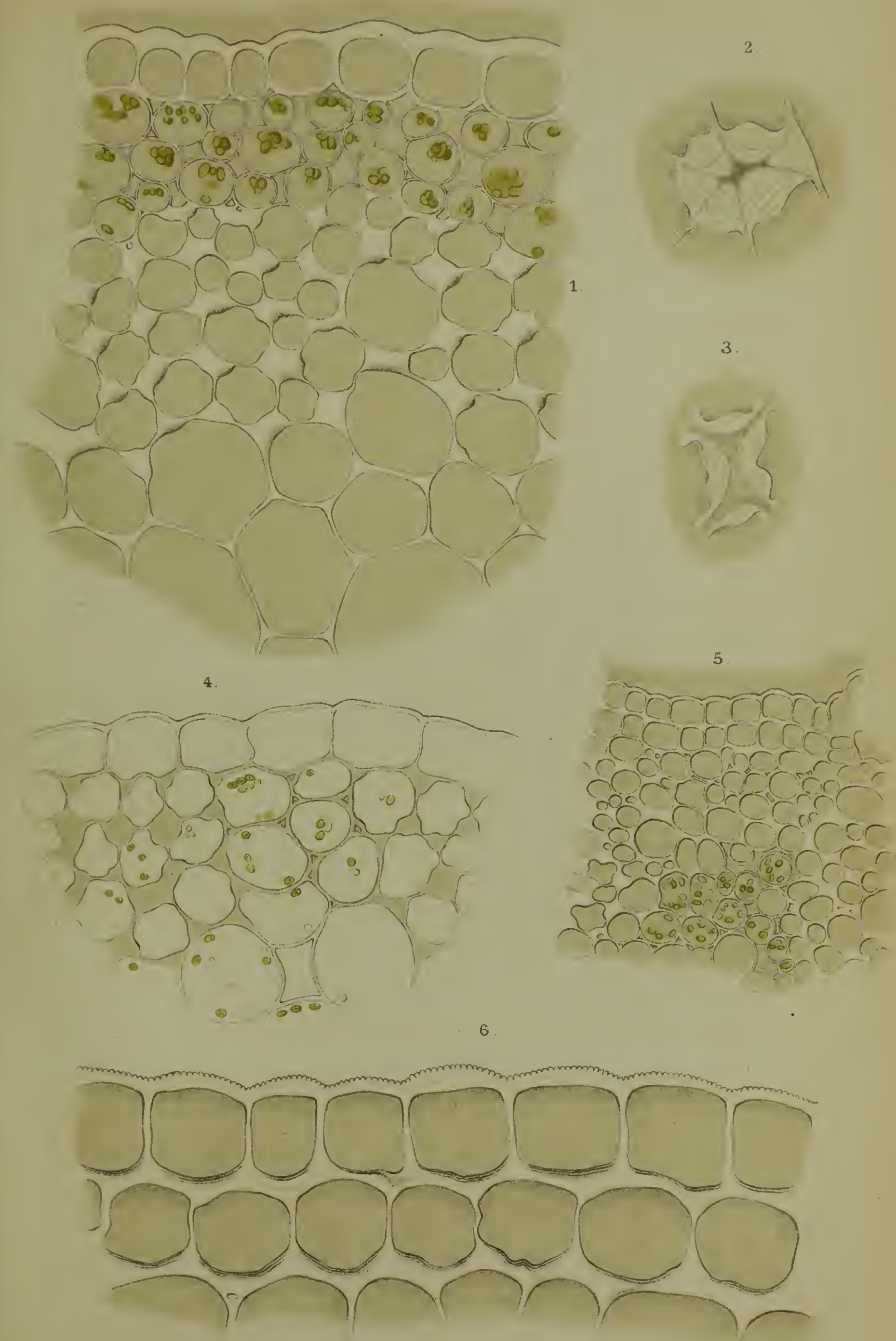
Pour terminer, je montrerai comment par la deuxième de ces propositions on peut démontrer très facilement un théorème de M. Wiener (*Math. Ann.* III, 32). Ce théorème peut être exprimé, beaucoup plus simplement que ne le fait M. Wiener, ainsi: Prenez 6 points B_1, B_2, A_3, B_4, B_5, B_6 sur une conique et un 7e point A sur la droite qui joint 2 de ces points p. e. B_5 et B_6. Quand on fait passer des courbes du troisième degré par ces 7 points, ces courbes ont encore deux à deux 2 intersections D_1, D_2. Les droites D_1, D_2 passent par le point A et les points B_1, B_2, B_3, B_4, D_1, D_2 sont sur une conique.

La démonstration de ce théorème se fait en considérant une des courbes du 3e degré comme courbe fondamentale. Cette courbe est coupée pour la première fois par une autre courbe du 3e degré dans les 7 points fixes et dans les points D_1, D_2. La seconde fois, elle est coupée par une courbe du 3e degré, qui se forme en combinant la conique avec la droite $B_5\, B_6\, A$. Cette fois, les points d'intersection sont les 7 points fixes et encore B_5, B_6. Les droites $B_5\, B_6$ et $D_1\, D_2$ se coupent alors sur la courbe fondamentale: mais, comme $B_5\, B_6$ passe par le point A, aussi $D_1\, D_2$ passe par ce point et le théorème de M. Wiener est démontré.

GRONINGUE, octobre 1882.



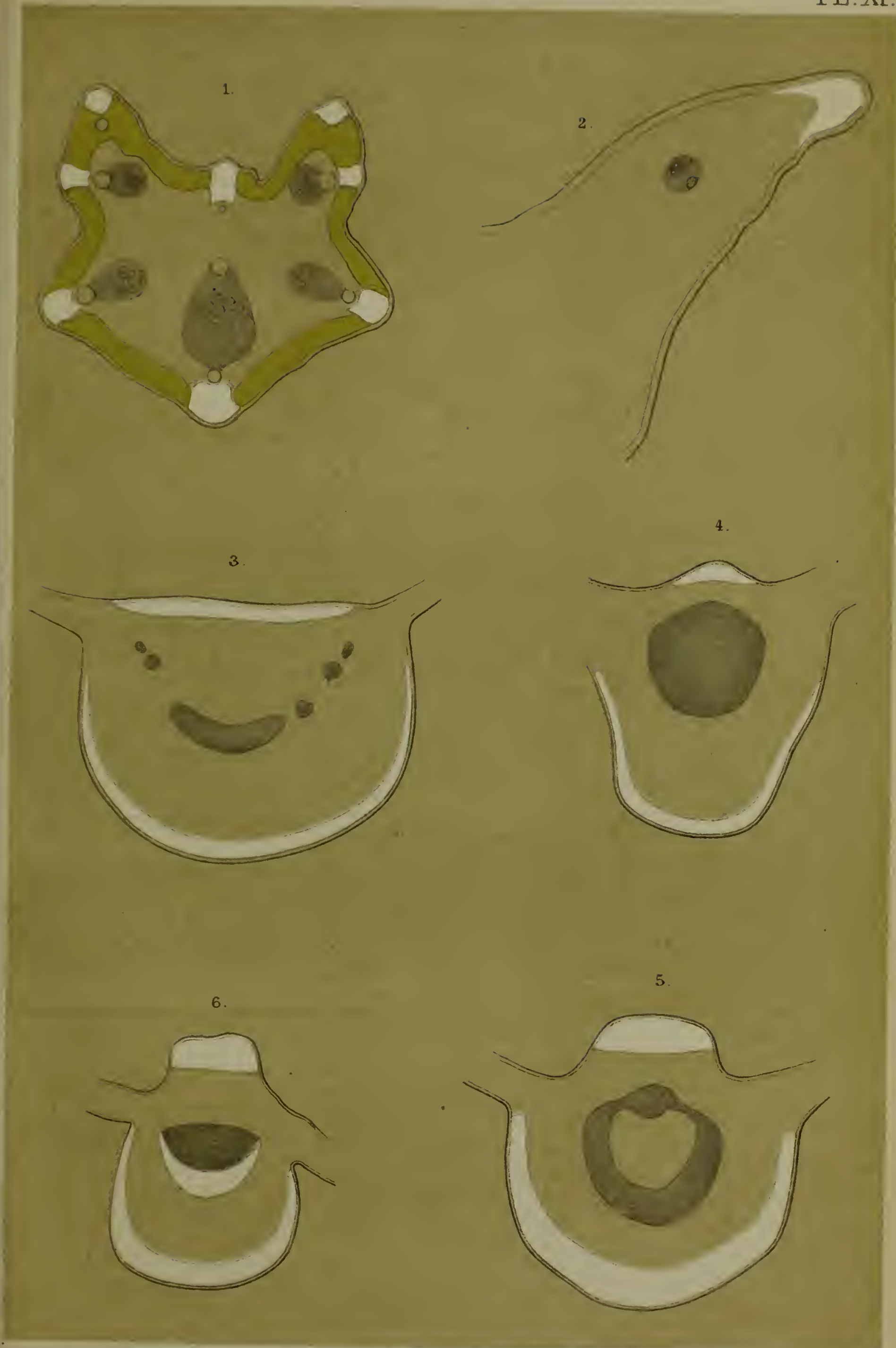
E Giltay del. P. W. M. Trap impr A. J. Wendel lith.



E. Giltay del. P. W. M. Trap impr. A. J. Wendel lith.



E. Giltay del. P. W. M. Trap impr. A. J. Wendel lith.



E. Giltay del. P.W.M. Trap impr. A.J. Wendel lith.

CINQIÈME LIVRAISON.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

Pour faciliter l'acquisition de la première série du recueil, composée des volumes I à X (années 1866—1875), avec tables alphabétiques générales des matières et des noms d'auteurs, cette série est offerte temporairement au prix réduit de:

fl. de Holl. 40 = francs 84 = marks 67.

Les personnes qui voudraient profiter de cette offre sont priées de s'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des sciences, M. E. H. VON BAUMHAUER, à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

COLLECTION

DE

PIERRES ET FERS MÉTÉORIQUES

DU

Professeur E. H. VON BAUMHAUER

Secrétaire de la Société Hollandaise des Sciences.

à

HARLEM.

MARS 1882.

HARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.

	Nombre de localités.	Poids.	
Pierres	69	5897	grammes
Fers	47	7440	„
Total	116	13337	„

I. Pierres météoriques.

No. du Catalogue.	Date de la chute.		Localité de la chute.	Nombre d'échantillons.	Poids en grammes.
1	5 Sept.	1814	**Agen,** Lot & Garonne, France.....	2	4,8
2	26 Avril	1803	**l'Aigle,** Orne, France.............	4	142,0
3	15 Mars	1806	**Alais,** Gard, France...............	parcelles	0,5
4			**Alexinac,** Serbie ?	1	48,0
5	24 Nov.	1805	**Asca,** Corse......................	2	0,6
6	9 Déc.	1858	**Aussun,** Haute Garonne, France....	2	17,3
10	15 Févr.	1814	**Bachmut,** Ekaterinoslaw, Russie...	1	15,7
11	10 Déc.	1871	**Bandong,** Preanger, Java..........	2	480,0
12	24 Juillet	1790	**Barbotan,** Landes, France.........	1	3.7
13	25 Mars	1843	**Bishopville,** South Carolina, Amérique	parcelles	5,6
14		1852	**Borkut,** Hongrie..................	1	1,8
20	31 Oct.	1849	**Cabarras County,** North Carolina, Amérique	2	53,0
21			**Casala,** Piemont..................	1	93,0
22	5 Aout.	1812	**Chantonnay,** Vendée, France.......	1	35,5
23	3 Oct.	1815	**Chassigny,** Langres, France........	2	0,8
24	12 Juin.	1841	**Chateau Renard,** Loiret, France...	1	4,4
25	24 Mai	1869	**Cleguerec,** Morbihan, France......	2	33,9
26	13 Oct.	1838	**Cold Bokkeveld,** Cap de Bonne Esperance, Afrique................	1	11,4

No. du Catalogue.	Date de la chute	Localité de la chute.	Nombre d'échantillons.	Poids en grammes.
27	19 Avril 1880	**Cusignano,** Borgo San Domino, Parma, Italie........................	1	4,0
30	9 Mai 1827	**Drake Creek,** Sumner County, Nashville, Tennessee, Amérique....	2	0,4
35	9 Mai 1826	**Ekaterinoslaw,** Russie.............	3	5,3
36	7 Nov. 1492	**Ensisheim,** Alsace, France.........	1	25,0
40	30 Nov. 1822	**Futtehpur,** Allahabad, Indes, Asie.	1	13,8
45	28 Mars 1859	**Harrison County,** Indiana, Amérique.	1	4.9
46	1 Janvier 1869	**Hessle,** Upsala, Suède.............	1	30,0
47	5 Avril 1804	**High Possil,** Glasgow.............	1	0,4
50	17 Mai 1855	**Igast,** Livland, Russie.............	1	16,8
51	13 Juin 1819	**Ionzac,** France...................	1	0,2
52	12 Février 1875	**Iowa County,** Amana, Amérique...	2	86,0
53	2 Juillet 1875	**Iowa County,** Township, Amérique.	1	2450,0
54	21 Juin 1821	**Iuvinas,** Ardèche, France...... ...	2	750,0
55	10 Aout. 1841	**Ivan,** Oedenburg, Hongrie.........	parcelles	4,7
60	13 Mai 1855	**Kaande,** Oesel.-Insel, Livland, Russie.	1	2,9
61	15 Avril 1857	**Kaba,** Hongrie....................	1	1,5
62	9 Juin 1866	**Knyahinya,** Hongrie...............	5	232,0
63	12 Mars 1811	**Kuleschowka,** Poltowa, Russie.....	1	2,0
66	25 Février 1847	**Linn County,** Hartford, Jowa, Amérique.........................		2,7

No. du Catalogue.	Date de la chute.	Localité de la chute.	Nombre d'échantillons.	Poids en grammes.
67	12 Juillet 1820	**Lixna,** Russie	2	3,1
70	20 Nov. 1768	**Mauerkirchen,** Autriche...........	parcelles	3,5
71	7 Oct. 1861	**Menow,** Mecklenbourg.............	1	4,4
72	4 Sept. 1852	**Mezö Madaras,** Autriche...........	1	0,8
73	26 Avril 1842	**Milena,** Pusinsko Selo, Warasdin, Croatie......................	2	11,6
74	10 Mai 1846	**Monte Milone,** Macerata, Italie....	3	2,8
75	29 Févr. 1868	**Motto di Conti,** Casale, Piemont...	1	6,5
76	24 Dec. 1858	**Murcia,** Espagne..................	4	3,1
80	10 Févr. 1825	**Nanjemoy,** Maryland, Amérique....	1	1,7
81	1 Mai 1860	**New Concord,** Muskingum County, Ohio, Amérique..............	2	1,6
86	1872	**Orvinio,** Italie..................	parcelles	4,7
90	28 Févr. 1857	**Parnallee,** Madras, Indes..........	1	3,0
91	19 Mai 1826	**Paulowgrad,** Russie...............	3	2,5
92	5 Aout 1855	**Petersburg,** Lincoln County, Tennessee, Amérique.............	parcelles	1,2
93	13 Févr. 1839	**Pine Bluff,** Little Piney, Missouri, Amérique....................	1	4,6
94	13 Oct. 1819	**Pohlitz,** Gera, Reuss, Allemagne...	1	4,0
95	30 Janvier 1868	**Pultusk,** Sielce Nowy, Russie......	5	450,0
100	27 Déc. 1857	**Quenggouk,** Pegu, Indes...........	1	2,0

No. du Catalogue.	Date de la chute.	Localité de la chute.	Nombre d'échantillons.	Poids en grammes.
105	15 Janvier 1824	**Renazzo,** Ferrara, Italie...........	1	6,7
110	Juin 1818	**Seres,** Macedoine.................	1	10,0
111	30 Nov. 1850	**Shalka,** Indes....................	1	1,7
112	30 Janvier 1868	**Sillée**...........................	1	1,0
113	13 Oct. 1872	**Soka Banja,** Serbie................	3	10,6
114	12 Mai 1808	**Stannern,** Moravie................	1	1,4
120	30 Juillet 1753	**Tabor,** Boheme....................	1	14,4
121	1807	**Timoschin,** Smolensk, Russie......	1	10,4
122	1810	**Tipperary,** Mooresfort, Irlande.....	1	0,5
123	19 Sept. 1869	**Tjabé,** Padang, Java.............	2	730,0
130	12 Juin 1840	**Uden,** Nord Braband, Pays-Bas....	1	3,5
131	2 Juin 1843	**Utrecht,** Pays-Bas................	3	7,5
135	9 Juin 1876	**Vavilovka,** Cherson, Russie........	1	5,0
140	1 Oct. 1857	**Yonne,** France....................	parcelles	2,2

II. Fers Météoriques.

Nº. du Catalogue.	Trouvé en	Localité de la chute.	Nombre d'échantillons.	Poids en grammes.
201	1751	**Agram,** Croatie, *tombé lé* 26 *Mai* 1751....	1	0,3
202	1844	**Arva,** aupied du Magura, Szlanicza, Hongrie.	5	42,0
203	1827	**Atacama,** Imilac, Bolivia, Amérique........	4	14,6
204	1867	**Auburn,** Macon County, Alabama, Amérique.	1	17,5
205	1869	**Augusta County** près de Staunton, Virginia, Amérique............................	1	250,0
210	1816	**Bemdego,** Bahia, Brésil..................	1	11,5
211	1829	**Bohumilitz,** Bohème......................	1	8,6
212		**Bogota,** New Grenada, Amérique. ?	1	2,0
213	1847	**Braunau,** Hauptmannsdorf, Bohème, *tombé le* 14 *Juillet* 1847 *à* $3\frac{3}{4}$ *après midi*.....	2	14,1
220	1793	**Cap de Bonne Espérance,** Afrique..........	2	2770,0
221	1846	**Carthage,** Tennessee, Amérique...........	1	62,6
222	1876	**Cartharina Santa,** Morro di Ricio, Brésil...	1	48,4
223		**Cauch,** Texas, Amerique. ?	1	54,4
224	1847	**Chesterville,** South Carolina, Amérique.....	1	64,4
225	1866	**Chili**.... ?	2	8,8
226	1840	**Cocke County,** Corby's Creek, Tennessee, Amérique..........................	1	28,2
230	1811	**Elbogen,** Bohème (Verwünschter Burggraf)..	2	20,0
231	1879	**Estherville,** Emmet County, Jowa, Amérique, *tombé le* 10 *Mai* 1879................	1	7,5
240	1856	**Hainholz,** Minden, Westphalie.............	4	145,0
241	1840	**Hemalga,** dans le désert Tarapaca, Chili, Amérique..........................	1	60,5
250	1776	**Krasnojarsk,** Jeneseisk, Russie, *Fer de Pallas*.	3	625,0

No. du Catalogue.	Trouvé en	Localité de la chute.	Nombre d'échantillons.	Poids en grammes.
255	1861	**Lagrange,** Oldham County, Kentucky, Amérique	1	50,4
256	1815	**Lenarto,** Scharosch, Hongrie...............	2	3,6
260	1855	**Netschaers,** Gouv. Tula, Russie............	1	4,4
265	1841	**Oaxaca,** Mexique..........................	2	24,7
266	1870	**Ovifac,** Grönland. ?	3	405,0
270	1850	**Pittsburg,** Pensylvanie, Amérique..........	1	4,7
271	1866	**Prambanan,** Java, Asie....................	2	90,0
272	1854	**Putnam County,** Georgie, Amérique........	parcelles	15,0
275	1823	**Rasgata,** New Grenada, Amérique..........	1	3,1
276	1814	**Red River,** Texas, Amérique..............	1	5,0
280	1851	**Salt River,** Kentucky, Amérique...........	1	5,9
281	1850	**Santa Rosa,** Junga, Rasgata, New Grenada, Amérique..........................	1	3,8
282	1850	**Schwetz,** Prusse, Allemagne...............	1	2,8
283	1847	**Seeläsgen,** Brandenbourg, Allemagne.......	7	1500,0
284	1763	**Sénegal,** Afrique..........................	1	1,5
285		**Steinbach,** Allemagne......................	1	12,6
290	1853	**Tazewell,** Claiborn County, Knoxville, Tennessee, Amérique....................	1	110,0
291	1784	**Toluca,** Istlahuaca, Mexique...............	1	460,0
293	1784	**Toluca,** Hacienda di Mani, Mexique........	3	48,8
294	1868	**Tucson Sonora,** Mexique..................	parcelles	10,0
295	1788	**Tucuman,** Otumpa, Rio de la Plata, Rép. Argentine...............................	1	13,5
300	1862	**Victoria West,** Cap de Bonne Espérance, Afrique	1	4,2
305	1854	**Werchne Udinsk,** Vitim, Russie............	1	135,0
307		Non déterminée............................	1	16,8
308		„ de la collection de M. Haidinger.	1	30,6
309		„		223,0

LISTE

DES

ACADÉMIES ET SOCIÉTÉS SAVANTES,

AVEC LESQUELLES LA

Société Hollandaise des Sciences à Harlem,

Échange ses Publications.

JANVIER 1882.

PAYS-BAS.

Amsterdam.	Koninklijke Akademie van Wetenschappen.
Amsterdam.	Genootschap ter Bevordering van Natuur- Genees- en Heelkunde.
Amsterdam.	Koninklijk Zoologisch Genootschap: Natura Artis Magistra.
Amsterdam.	Bibliotheek der Universiteit.
Amsterdam.	Wiskundig Genootschap: Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.
Delft.	Polytechnische School.
's Gravenhage.	Koninklijke Bibliotheek.
's Gravenhage.	Koninklijk Nederlandsch Instituut van Ingenieurs.
Groningen.	Bibliotheek der Universiteit.
Haarlem.	Stads Bibliotheek.
Haarlem.	Teylers Stichting.
Haarlem.	Nederlandsche Maatschappij ter Bevordering van Nijverheid.
's Hertogenbosch.	Noord-Brabantsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.
Leiden.	Nederlandsche Botanische Vereeniging.
Leiden.	Bibliotheek der Universiteit.
Leiden.	Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde.
Leiden.	Rijks Sterrenwacht.
Leiden.	Nederlandsche Dierkundige Vereeniging.
Middelburg.	Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen.
Rotterdam.	Bataafsch Genootschap van proefondervindelijke Wijsbegeerte.
Rotterdam.	Leeskabinet.
Utrecht.	Bibliotheek der Universiteit.
Utrecht.	Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.
Utrecht.	Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut.

INDES NÉERLANDAISES.

Batavia.	Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.
Batavia.	Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië.
Batavia.	Sterrenwacht.

LUXEMBOURG.

Luxembourg.	Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg.
Luxembourg.	Société des Sciences naturelles.

ALLEMAGNE.

Berlin.	Königliche Academie der Wissenschaften.
Berlin.	Deutsche Chemische Gesellschaft.
Berlin.	Deutsche Geologische Gesellschaft.
Bonn.	Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande.
Bremen.	Naturwissenschaftlicher Verein.
Breslau.	Schlesische Gesellschaft für Vaterländische Kultur.
Dantzig.	Naturforschende Gesellschaft.
Dresden.	Naturwissenschaftliche Gesellschaft: Isis.
Durkheim.	Pollichia: Naturwissenschaftlicher Verein der Bayerischen Pfalz.
Erlangen.	Physikalisch-Medicinische Gesellschaft.
Frankfort a. M.	Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft.
Frankfort a. M.	Physikalischer Verein.
Giessen.	Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Giessen.	Redaction: Jahresbericht der Chemie.
Göttingen.	Kön. Gesellschaft der Wissenschaften.
Halle.	Naturforschende Gesellschaft.
Halle.	Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.
Halle.	K. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Academie der Naturforscher.
Heidelberg.	Naturhistorisch- Medecinisches Verein.
Kiel.	Universität.
Kiel.	Ministerial Kommission zur Untersuchung der Deutschen Meere.
Kiel.	Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.
Königsberg.	Physikalisch- oekonomische Gesellschaft.
Leipzig.	Redaction: Annalen der Physik und Chemie.
Leipzig.	Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.
Leipzig.	Kön. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.

München.	Kön. Baierische Akademie der Wissenschaften.
München.	Kön. Sternwarte.
München.	Redaction: Annalen der Chemie und Pharmacie.
Nürnberg.	Germanisches National Museum.
Stettin.	Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Alterthumskunde.
Stuttgart.	Verein für Vaterländische Naturkunde.
Tubingen.	Verein für Geschichte und Naturgeschichte.
Ulm.	Verein für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben.
Wiesbaden.	Redaction: Zeitschrift für Analytische Chemie.
Wiesbaden.	Nassauischer Verein für Naturkunde.
Wurzburg.	Physikalisch-Medicinische Gesellschaft.

AUTRICHE.

Bistritz.	Gewerbeschule.
Brunn.	K.K. Mährische Gesellschaft für Ackerbau, Natur- u. Landeskunde.
Brunn.	Naturforschender Verein.
Grätz.	Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.
Grätz.	Historischer Verein für Steiermark.
Pesth.	Akademie der Wissenschaften von Ungarn.
Prag.	Kön. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
Prag.	Sternwart.
Trieste.	Società Adriatica di Scienze naturali.
Wien.	K.K. Akademie der Wissenschaften.
Wien.	K.K. Geologische Reichsanstalt.
Wien.	K.K. Zoölogisch Botanische Gesellschaft.

RUSSIE.

Dorpat.	Académie des Sciences.
Dorpat.	Observatoire.
Helsingfors.	Société pour la Flore et Faune Fennique.
Helsingfors.	Societas Scientiarum Fennica.
Kasan.	Académie Impériale des Sciences.
Moscou.	Société Impériale des Naturalistes.
Odessa.	Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie.
St. Pétersbourg.	Académie Impériale des Sciences.
St. Pétersbourg.	Jardin Impérial de Botanique.
St. Pétersbourg.	Observatoire Physique Central.

SUISSE.

Bâle.	Naturforschende Geselschaft.
Berne.	Société Helvétique des Sciences naturelles.
Genève.	Institut National Genevois.
Genève.	Rédaction de la Bibliothéque Universelle.
Genève.	Université.
Genève.	Société de Physique et d'Histoire naturelle.
Lausanne.	Société Vaudoise des Sciences naturelles.
Neuchâtel.	Société des Sciences naturelles.
Zurich.	Naturforschende Gesellschaft.

ITALIE.

Catania.	Accademia Gioenia di Scienze Naturali.
Milan.	Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
Milan.	Societa Italiana di Scienze Naturali.
Modena.	Societa dei Naturalisti.
Naples.	Station Zoologique.
Naples.	Accademia R. delle Scienze e belle Lettere.
Palermo.	Accademia di Scienze, Lettere et Arti.
Pisa.	Societa Toscana di Scienze Naturali.
Pisa.	Ecole Normale Supérieure.
Rome.	Accademia Reale dei Lincei.
Rome.	Reale Comitato Geologico d'Italia.
Turin.	Accademia R. delle Scienze.
Turin.	Musée Minéralogique.
Venise.	R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

DANEMARCK, SUÈDE et NORVÈGE.

Christiania.	K. Norske Frederiks Universitet.
Christiania.	Videnskabs Selskabet.
Copenhague.	K. Danske Videnskabernes Selskab.
Copenhague.	Naturhistorisk Forening.
Copenhague.	Botaniske Forening.
Copenhague.	K. Nordiske Oldskrift-Selskab.
Stockholm.	Bureau de la Recherche Géologique de la Suède.

Stockholm.	Bureau Nautique Météorologique.
Stockholm.	K. Svenska Vetenskaps-Akademie.
Throndhjem.	K. Norske Videnskabers Selskab.
Upsal.	Societas Scientiarum.
Upsal.	Observatoire.

FRANCE.

Amiens.	Société Linnéenne du Nord de la France.
Bordeaux.	Société des Sciences physiques et naturelles.
Cherbourg.	Société Nationale des Sciences naturelles.
Cherbourg.	Société Nationale Académique.
Dijon.	Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
Lille.	Société des Sciences, d'Agriculture et des Arts.
Lyon.	Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.
Lyon.	Société d'Agriculture, d'Histoire naturelle et des Arts Utiles.
Lyon.	Société Linnéenne.
Marseille.	Société Scientifique Industrielle.
Montpellier.	Académie des Sciences et Lettres.
Nancy.	Académie de Stanislas.
Nancy.	Société des Sciences.
Paris.	Académie des Sciences de l'Institut de France.
Paris.	Association Française pour l'Avancement des Sciences.
Paris.	Conservatoire des Arts et Métiers.
Paris.	Ecole Polytechnique.
Paris.	Rédaction des Annales de Chimie et de Physique.
Paris.	Muséum d'Histoire Naturelle.
Paris.	Société Chimique.
Paris.	Rédaction de la Revue Scientifique.
Paris.	Société Géologique de France.
Paris.	Société Philomatique.
Paris.	Société Mathématique de France.
Paris.	Société Zoologique de France.
Paris.	Société Zoologique d'Acclimatation.
Rouen.	Académie des Sciences, Belles- Lettres et Arts.
Rouen.	Société des Amis des Sciences naturelles.

BELGIQUE.

Bruxelles.	Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique
Bruxelles.	Bibliothèque Royale de Belgique.
Bruxelles.	Observatoire Royal de Bruxelles.
Bruxelles.	Société Entomologique de Belgique.
Bruxelles.	Société Malacologique de Belgique.
Bruxelles.	Société Belge de Microscopie.
Liège.	Société Royale des Sciences.
Mons.	Société des Sciences, des Arts et Lettres du Hainaut.
Namur.	Société Archéologique de Namur.

ANGLETERRE.

Dublin.	Royal Geological Society.
Dublin.	Royal Irish Academy.
Dublin.	Royal Dublin Society.
Dublin.	Royal Geological Society of Irland.
Edinburgh.	Royal Society.
Glasgow.	Philosophical Society.
Liverpool.	Literary and Philosophical Society.
London.	British Association for the Advancement of Science.
London.	Redaction: Medical Record.
London.	Redaction: Chemical News.
London.	Chemical Society.
London.	Royal Microscopical Society.
London.	Geological Society.
London.	Mathematical Society.
London.	Linnean Society.
London.	Royal Institution of Great-Britain.
London.	Royal Society of London.
London.	Zoological Society.
Manchester.	Literary and Philosophical Society.

COLONIES ANGLAISES.

Melbourne.	Public Library.
Sydney.	Linnean Society of New South-Wales.
Sydney.	Royal Society of New South-Wales.
Victoria.	Philosophical Institution.

ESPAGNE.

Madrid.	R. Academia de Ciencias.
San Fernando.	Observatorio de Marina.

PORTUGAL.

Lisbonne.	Academia R. das Sciencias.

AMÉRIQUE.

Baltimore.	Peabody Institute.
Boston.	Boston Society of Natural History.
Boston.	American Academy of Arts and Sciences.
Buenos Aires.	Museum Publicum.
Buenos Aires.	Academy of Siences.
Buffalo.	Society of Natural Sciences.
Cambridge, Mass.	Museum of comparative Zoology.
Caracas, Venez.	Sociedad de Ciencias fisicas y naturales.
Chappell Hill.	Soule University.
Chicago.	Chicago Academy of Sciences.
Davenport, Iowa.	Davenport Academy of Natural Sciences.
Cordova.	Academia Nacional de Ciencias.
San Francisco.	California Academy of Natural Sciences.
Indianapolis.	Geological Survey of Indiana.
Indianapolis.	Academy of Sciences.
Jowa City, Jowa.	Jowa Weather Service.
St.Louis, Missoury.	Academy of Science.
Madison.	Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters.
Madison.	Wisconsin State Agricultural Society.
Montreal.	Society of Natural History.
New Haven.	Redaction: American Journal of Sciences and Arts.
New Haven.	Connecticut Academy of Arts and Sciences.
Newport.	Orleans County Society of Natural Sciences.
New York.	Academy of Sciences.
Philadelphia.	Academy of Natural Sciences.
Philadelphia.	American Philosophical Society.

Rio Janeiro.	l'Empereur du Brésil.
Rio Janeiro.	Musée National.
Salem, Mass.	Essex Institute.
Salem, Mass.	American Association for the Advancement of Science.
Santiago.	Universidad de Chile.
Toronto.	Canadian Institute.
Washington.	National Academy of Sciences.
Washington.	Observatory.
Washington.	U. S. Patent Office.
Washington.	Smithsonian Institution.

HARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.


U. HOLZER
BINDER
BOSTON, MASS.

